



116
37

~~147-38~~

B Prov

VI
238

27

616078

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.

(EXTRAIT DU TOME XXIX DES MÉMOIRES.)

ÉTUDE APPROFONDIE

SUR

LES DEUX ÉQUATIONS FONDAMENTALES

$$\text{Lim } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x ;$$

©

P. M.

M. E. LAMARLE,

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR
À L'UNIVERSITÉ DE GAND.

(Présenté à la séance du 1^{re} juillet 1884.)



ÉTUDE APPROFONDIE

SUR

LES DEUX ÉQUATIONS FONDAMENTALES

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{et} \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

L'étude dont je vais donner ici les développements, peut être considérée comme le complément d'un traité publié, en 1844, sous le titre suivant : *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante, suivi des éléments du calcul différentiel résumés à un point de vue purement algébrique*¹. Elle consolide les bases de ce premier travail et le rend d'un accès facile; elle dégage de toute obscurité, de toute abstraction métaphysique, les principes qui y sont exposés, et les présente sous une forme où ils deviennent, en quelque sorte, matériellement sensibles.

Cette étude est divisée en quatre chapitres distincts. Le premier traite de l'équation symbolique,

$$(1). \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

le second, de l'équation différentielle,

$$(2). \quad dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

¹ Paris, Victor Dalmont, quai des Augustins, n° 49.

le troisième et le quatrième donnent un aperçu des ressources offertes, d'une part et en algèbre, par l'équation (1), d'autre part et en mathématiques transcendantes, par l'exacte interprétation de l'équation (2).

Une analyse succincte de chacun de ces chapitres permettra au lecteur d'en apprécier l'importance relative, et de porter directement son attention sur ceux des points traités qui lui paraîtraient sujets à controverse ou plus intéressants.

L'objet du chapitre I^{er} est d'établir *a priori* l'équation fondamentale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

La fonction $y = f(x)$ étant supposée continue, il est visible que si l'on fait décroître indéfiniment l'accroissement h , le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se trouve assujéti à subir l'une ou l'autre des cinq conditions suivantes :

- 1° Demeurer constant;
- 2° Converger vers une limite constante ou nulle;
- 3° Croître sans limites;
- 4° Osciller sans fin entre plusieurs limites distinctes;
- 5° Converger vers une limite qui dépend de la valeur attribuée à la variable x et change avec cette valeur.

On démontre aisément, qu'abstraction faite du cas particulier où la fonction y est linéaire, et où la condition (1) se réalise d'une manière permanente, chacune des trois premières conditions n'est jamais possible que pour certaines valeurs de la variable conservant entre elles des écarts déterminés. J'ai cru devoir reproduire ces démonstrations, en me bornant à en changer la forme. Quant à la condition (4), je ne pense pas qu'on s'en soit occupé jusqu'ici, ni surtout qu'on soit parvenu à démontrer pour elle, comme pour les trois premières, qu'elle est *généralement* impossible. J'ai entrepris cette tâche délicate, et je erois être parvenu à l'accomplir, sinon aussi simplement que je l'aurais voulu, du moins avec toute la rigueur désirable, et sans recourir à d'autres notions que celles dont on a besoin en algèbre pour la résolution des équations du 1^{er} degré.

Parvenu à ce point, j'ai pu conclure que la condition (5) subsistait

seule d'une manière générale et permanente. J'ai, en outre, établi que la limite du rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est elle-même continue, soit pour toute l'étendue de l'intervalle où la fonction y varie avec continuité, soit pour une suite de subdivisions, comprenant dans leur ensemble toute cette étendue.

De là résulte l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

démontrée *a priori*, sans autre secours que celui des premières notions de l'algèbre, pouvant être prise pour base de tous les développements ultérieurs, apportant avec elle une ressource précieuse jusqu'à présent interdite, offrant enfin une extrême facilité qui permet de pousser plus loin l'enseignement élémentaire, tout en lui imprimant une marche beaucoup plus rapide.

On objectera, sans doute, que des élèves, à peine initiés aux spéculations algébriques, éprouveraient une difficulté considérable à bien saisir l'ensemble des propositions développées dans le chapitre I^{er} de cette étude. En ce cas, l'on peut y suppléer par certaines inductions géométriques, ou, plus simplement encore, se borner à poser en principe le théorème dont on a besoin, sauf à réserver pour une époque ultérieure la démonstration jugée d'abord trop difficile.

L'objet du chapitre II est de définir la différentielle et d'interpréter l'équation.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Partant de l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

et observant l'invariabilité absolue du mode suivant lequel s'accomplit la génération simultanée des accroissements Δx , Δy , lorsque la fonction y est linéaire, on est conduit à l'induction suivante :

Dans toute fonction continue et non linéaire

$$y = f(x).$$

La génération simultanée des accroissements Δy et Δx commence en général suivant une certaine raison de proportionnalité. Constamment variable avec x , cette raison est exprimée par la valeur particulière que la fonction dérivée $f'(x)$ affecte à l'origine même des accroissements.

Pour vérifier l'exactitude de cette induction, et établir, avec une rigueur complète, le principe qui en dérive, je procède par voie de synthèse. Je prends une fonction quelconque continue $\varphi(x)$, et j'imagine que, pour chaque valeur affectée par la variable, elle exprime la *raison* correspondante suivant laquelle *commence* la génération simultanée des accroissements Δy , Δx , y étant une fonction inconnue qu'il s'agit de déterminer d'après cette condition.

Je démontre alors,

1° Que si l'on désigne par le symbole $M_x^{x+\Delta x} \varphi(x)$ la limite vers laquelle converge la moyenne arithmétique

$$\frac{\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \varphi\left(x + 2\frac{\Delta x}{n}\right) + \dots + \varphi\left(x + (n-1)\frac{\Delta x}{n}\right)}{n},$$

à mesure que le nombre n devient de plus en plus grand, l'on a en général

$$\Delta y = \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x} \varphi(x);$$

2° Que, si l'on identifie avec la dérivée $f'(x)$ la fonction $\varphi(x)$ dont on dispose arbitrairement, l'accroissement Δy devient lui-même identique à celui de la fonction $f(x)$.

De là résulte la déduction suivante :

Les accroissements $\Delta(ax + b) = a\Delta x$ et $\Delta f(x) = \Delta x M_x^{x+\Delta x} f'(x)$ étant rapportés tous deux à une même origine, et tous deux répondant ensemble à une même variation continue de la quantité Δx , c'est suivant un même mode de composition

successive que s'accomplit leur génération simultanée. La seule distinction consiste en ce que, pour l'un, l'élément, représenté numériquement par a , intervient constamment sans changer de grandeur, tandis que, pour l'autre, ce même élément passe par une suite non interrompue de déterminations transitoires, toutes variables avec x dans l'intervalle Δx , et exprimées par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$.

Le sens exprimé par l'énoncé qui précède pouvant offrir quelque obscurité, je le rends en quelque sorte matériellement palpable par une construction géométrique tout élémentaire.

Cela posé, je démontre :

1° Que la différentielle n'est qu'une différence ordinaire prise dans une certaine hypothèse ;

2° Que cette hypothèse consiste à considérer comme constante, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx , la raison de proportionnalité suivant laquelle la génération simultanée des accroissements commence à l'origine de cet intervalle.

Je termine par l'exposé de deux théorèmes aussi simples que féconds en ressources, et par des considérations générales très-propres à élucider complètement la question importante traitée dans ce chapitre.

Le chapitre III a pour objet l'indication des ressources que peut offrir, en analyse algébrique, l'équation fondamentale,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

lorsqu'elle est démontrée, ou admise *a priori*, et qu'on la prend pour base des développements ultérieurs.

J'établis d'abord la règle unique et générale d'où dépendent, comme conséquences immédiates, toutes les règles particulières de la dérivation.

J'en déduis la dérivée de la fonction x^m , l'exposant m étant quelconque.

Je démontre ensuite le théorème relatif à la valeur moyenne de la fonction dérivée, et j'établis les relations générales qui existent entre les valeurs moyennes des dérivées successives d'une même fonction.

De là résulte immédiatement, et sans qu'on ait besoin d'aucune autre notion pour y parvenir, l'identité générale

$$f(x) = f(x) + \frac{x-x}{1} f'(x) + \frac{(x-x)^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.}, \\ + \frac{(x-x)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{n-1}(x) + \frac{x-x}{1.2 \dots (n-1)} M_n'(x-x) f^n(x).$$

comprenant, comme cas particuliers, le binôme de Newton, la formule de Taylor et celle de Maclaurin.

Passant aux différences ordinaires des ordres supérieurs, j'ajoute quelques nouveaux détails à la théorie générale des *moyennes arithmétiques transcendantes*, et je définis les moyennes multiples, ce qui me conduit à l'équation très-simple

$$\Delta^n y = \Delta x^n \cdot \sum_x^{x+\Delta x} f^n(x).$$

Je démontre d'ailleurs qu'on a généralement

$$\Delta^n y = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} \Delta x^n \cdot f^n(x) + \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix} \right\} \Delta x^{n+1} f^{n+1}(x) + \left\{ \begin{matrix} n+2 \\ n \end{matrix} \right\} \Delta x^{n+2} f^{n+2}(x) + \text{etc.}$$

le terme sommatoire, qui complète le second membre et le rend identique au premier, pouvant s'exprimer indifféremment, soit à l'aide des moyennes multiples à indices constants, soit à l'aide des moyennes simples à indices variables.

La simplicité, la facilité de toutes ces déductions dépend évidemment de deux causes. La première est la base fournie par l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

la seconde résulte de l'emploi du symbole adopté pour l'expression des moyennes arithmétiques transcendantes.

Il existe entre les moyennes simples ou multiples et les intégrales correspondantes une analogie manifeste. En la remarquant, l'on se deman-

dera, peut-être, pourquoi les avantages importants, qui résultent, en analyse algébrique, de l'introduction du nouveau symbole, ne peuvent s'obtenir également par l'emploi des intégrales. En voici la raison. Rien de plus simple, de plus élémentaire, que la conception de la limite vers laquelle converge la moyenne arithmétique

$$\frac{f(x) + f\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + f\left(x + \frac{(n-1)\Delta x}{n}\right)}{n}.$$

Rien au contraire de plus obscur, de plus difficile à concevoir nettement, que la définition directe de l'intégrale. La considération des moyennes est, en algèbre, parfaitement à sa place. Elle n'apporte avec elle aucune complication et y est d'un immense secours. La considération des intégrales, telles qu'on les définit en analyse transcendante, ne saurait intervenir dans les éléments sans les dépouiller de la clarté et de la certitude mathématique qui y sont absolument nécessaires.

Le chapitre IV a pour objet l'indication des ressources que présente dans les diverses applications de l'analyse transcendante l'exacte définition de la différentielle.

Je montre, d'abord, comment la différentielle peut être définie, d'après la condition qu'elle remplit de former une partie déterminée de la différence ordinaire. Je signale les avantages que peut offrir cette première définition purement algébrique et essentiellement rationnelle. Je constate ensuite son insuffisance, et, après avoir rappelé ce que la différentielle est par elle-même, ce qu'elle exprime par rapport à la fonction dont elle dérive, en un mot quelle est sa signification véritable et complète, je donne un aperçu des ressources que présente ce nouveau point de vue, très-supérieur à la méthode infinitésimale.

S'agit-il d'aller au fond des choses et d'en pénétrer la nature intime? Il n'est besoin pour cela que de recourir à l'équation différentielle et de traduire en langage ordinaire la condition qu'elle exprime algébriquement. Les exemples de ce genre d'applications sont au nombre de quatre, comprenant, en géométrie, la question des tangentes et des rayons de

courbure, en dynamique, celle de la vitesse acquise et de l'action motrice dans le mouvement d'un point matériel.

Sagit-il, au contraire, de descendre des causes à leurs effets, dans l'étude de certains phénomènes, compliqués par la variation incessante des grandeurs qui y interviennent? L'équation différentielle résout la question proposée en exprimant les effets qui ont lieu dans l'hypothèse très-simple où les grandeurs dont il s'agit, cessant de varier, persistent dans une seule et même détermination devenue permanente. Le volume engendré par une aire qui se déplace en changeant de grandeur, l'espace décrit par un mobile qui se transporte en changeant de vitesse, sont les exemples choisis pour mettre en évidence les avantages offerts dans tous les cas de cette espèce.

Indépendamment des ressources que je viens d'indiquer, et qui résultent de l'application littérale de deux théorèmes exposés dans le chapitre second, l'on peut, dans un grand nombre de cas, procéder plus simplement encore, en se fondant sur certaines déductions de ces théorèmes ou des principes sur lesquels ils reposent. Pour donner une idée de l'extrême facilité que présente ainsi l'emploi des différentielles, considérées directement dans la génération qu'elles expriment, et où elles ne sont plus en réalité que des différences ordinaires, je donne la rectification de l'arc curviligne, les plans normaux et tangents, enfin la courbure des surfaces.

Je termine par les deux définitions que comportent les différentielles des ordres supérieurs, l'une résultant des différentiations successives, l'autre étant immédiate et tout à fait directe. Ici plus de difficultés. Tout se réduit à une simple extension de la définition donnée pour les différentielles du 1^{er} ordre.

La considération des différentielles des ordres supérieurs conduit à la formule suivante :

$$\Delta y = dy + \frac{d^2y}{1.2} + \frac{d^3y}{1.2.3} + \text{etc.}$$

ou plus généralement

$$\Delta^n y = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} d^n y + \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix} \right\} d^{n+1} y + \left\{ \begin{matrix} n+2 \\ n \end{matrix} \right\} d^{n+2} y + \text{etc.}$$

Ces formules ont l'avantage d'être extrêmement simples et de trancher nettement avec la méthode infinitésimale. Elles font ressortir l'absurdité radicale de cette conception, où l'on imagine que les différentielles s'évanouissent les unes devant les autres, lorsqu'elles ne sont point du même ordre, et toutes ensemble devant les différences ordinaires.

Les détails qui précèdent montrent suffisamment que l'objet principal de cette étude est la définition de la différentielle, et la création d'une méthode fondée sur cette définition, où rien d'obscur ne reste, où rien non plus n'est omis de ce qu'il importe d'y introduire pour qu'elle soit complète.

Les géomètres, déjà familiarisés avec les diverses méthodes d'exposition du calcul différentiel, reconnaîtront aisément dans notre conception fondamentale la généralisation de l'idée mère des fluxions newtoniennes. Pour ne laisser aucun doute sur ce point, nous reproduirons ici quelques passages empruntés à Thomas Simpson et publiés par lui en 1796, dans la 2^{me} édition d'un ouvrage intitulé : *The doctrine and applications of fluxions*.

Voici d'abord la définition que Thomas Simpson donne de ces quantités. Je traduis littéralement ¹.

1° Pour se former une juste idée de la nature des fluxions, il faut considérer toutes les grandeurs comme engendrées par le déplacement *continu* de leurs bornes ou limites, soit par exemple une ligne par le mouvement d'un point, une surface par le mouvement d'une ligne, un solide par le mouvement d'une surface.

2° Chaque grandeur ainsi engendrée prend le nom de variable ou fluente. *La quantité dont une fluente s'accroît uniformément dans un temps donné si la vitesse de génération, en une position ou un instant quelconque, demeure*

¹ 1° *In order to form a proper idea of the nature of fluxions, all kinds of magnitudes are to be considered as generated by the continual motion of some of their bounds or extremes; as a line by the motion of a point, a surface by the motion of a line, and a solid by the motion of a surface.*

2° *Every quantity so generated is called a variable or flowing quantity. and the magnitude by which any flowing quantity would be uniformly increased, in a given portion of time, with the generating velocity, at any proposed position or instant, (was it from thence to continue invariable) is the fluxion of the said quantity at that position or instant.*

rait dès lors invariable, est la fluxion de cette même grandeur pour cette position ou cet instant.

Voici ensuite quelques explications extraites de la préface du même ouvrage et ayant pour objet la justification des changements introduits par l'auteur dans la deuxième édition, comparée à la première ¹.

« Les notions et explications données ici sur les premiers principes des fluxions ne diffèrent pas essentiellement de ce qu'elles sont dans le traité sus-mentionné, bien qu'exprimées en d'autres termes. La considération du temps, que j'ai introduite dans la définition générale, sera peut-être mal accueillie par ceux qui veulent voir dans les fluxions de simples vitesses; mais l'avantage de les considérer autrement (non comme les vitesses elles-mêmes, mais comme les quantités dont les grandeurs s'accroitraient uniformément en un temps fixé) me paraît suffire pour prévenir toute objection de ce chef.

« En considérant les fluxions comme de simples vitesses, la pensée est, pour ainsi dire, restreinte à un point, et, si l'on n'y prend garde, insensiblement engagée dans des difficultés métaphysiques. Selon notre manière de les concevoir et de les exposer, l'étudiant a moins de précautions à prendre, et les fluxions des ordres supérieurs sont rendues beaucoup plus simples et plus intelligibles. En outre, bien que Newton définisse les fluxions comme étant les vitesses elles-mêmes, cependant il a recours aux accroissements ou moments engendrés pendant des

¹ *The notion and explication, here given of the first principles of fluxions, are not essentially different from what they are in the above mentioned treatise, tho' expressed in other terms. The consideration of time, which I have introduced into the general definition, will, perhaps, be disliked by those who would have fluxions to be mere velocities: but the advantage of considering them otherwise not as the velocities themselves, but the magnitudes they would uniformly generate in a given finite time appear to me sufficient to obviate any objection on that head.*

By taking fluxions as mere velocities, the imagination is confined, as it were, to a point, and, without proper care, insensibly involved in metaphysical difficulties. But according to our method of conceiving and explaining the matter, less caution in the learner is necessary, and the higher orders of fluxions are rendered much more easy and intelligible. Besides, tho' sir Isaac Newton defines fluxions to be the velocities of motions, yet he hath recourse to the increments or moments, generated in equal parties of time, in order to determine velocities, which he afterwards teaches us to expound by finite magnitudes of other kinds, without which (as is already hinted above) we could have but very obscure ideas of the higher orders of fluxions. For if motion in (or at) a point be se

« temps égaux pour déterminer ces vitesses, qu'il nous apprend ainsi à
 « représenter par des grandeurs finies d'une autre espèce, sans lesquelles
 « (ainsi que nous l'avons déjà indiqué) nous ne pourrions nous former
 « qu'une idée très-obscurc des fluxions des ordres supérieurs. En effet,
 « si le mouvement en un point est si difficile à concevoir que l'on a été
 « jusqu'à contester l'existence même du mouvement, combien doit-il être
 « plus embarrassant de se former une idée, non-seulement de la vitesse
 « d'un mouvement, mais aussi des changements et modifications infinies
 « de ce mouvement en un seul et même point, où les fluxions de tous les
 « ordres doivent être rapportées.

« En voyant que la notion des fluxions, telles que nous les avons définies,
 « suppose un mouvement universel, il peut paraître difficile, au
 « premier abord, d'assigner avec exactitude les fluxions des grandeurs
 « engendrées par un mouvement accéléré ou retardé, puisqu'il n'existe
 « aucune durée, pas la moindre, pendant laquelle la vitesse de génération
 « demeure la même. Il est vrai que nous ne pouvons alors exprimer
 « la fluxion par aucun accroissement, ou espace *effectivement* engendré
 « dans un temps donné (comme dans le cas du mouvement uniforme);
 « néanmoins, il est facile de déterminer ce que *serait* l'accroissement *contemporain*, ou l'espace engendré, si l'accélération ou la retardation
 « venait à cesser à partir du point où il s'agit de trouver la fluxion.
 « De là, la vraie fluxion qu'on obtient elle-même sans le secours des

difficult to conceive, that some have, even, gone so far as to dispute the very existence of motion, how much perplexing must it be to form a conception, not only of the velocity of a motion but also in infinite changes and affections of it, in one and the same point, where all the orders of fluxions are to be considered.

Seeing the notion of a fluxion, according to our manner of defining it, supposes an universal motion, it may, perhaps, seem a matter of difficulty, at first view, how the fluxions of quantities generated by means of accelerated or retarded motions, can be rightly assigned, since not any, the least, time can be taken, during which the generating celerity continues the same. There, indeed, we cannot express the fluxion by any increment or space ACTUALLY generated in a given time (as in uniform motion); but, then we can easily determine what the contemporary increment, or generated space, WOULD BE, if the acceleration or retardation was to cease, at the proposed position, in which the fluxion is to be found. Whence the true fluxion, it-self, will be obtained without the assistance of infinitely small quantities, or any metaphysical consideration.

« quantités infiniment petites, ni d'aucune considération métaphysique. »

On voit, par ces extraits, que la différentielle et la fluxion s'identifient lorsqu'on restreint à un cas tout exceptionnel notre définition générale. Cette restriction, compliquée de la présence constante d'une idée étrangère, la vitesse, présente de graves inconvénients. Il ne suffit pas, en effet, que la définition soit exacte et purement rationnelle, ni que, touchant au fond même de la réalité, elle en accuse une face particulière. Il faut, pour la facilité des applications, que, sans devenir obscure à force d'être abstraite, elle conserve néanmoins toute la généralité dont elle est susceptible, et puisse ainsi, selon les cas, revêtir indifféremment toutes les formes qu'elle comporte. Un sens purement restrictif constitue déjà un obstacle : s'il se complique d'une idée étrangère, qui gêne et entrave les déductions, qui voile ou dissimule la vérité, l'obstacle grandit et crée des embarras sérieux. De là vient l'insuffisance de la méthode des fluxions et l'insuccès des efforts laborieux tentés par Mac-Laurin pour l'appropriier aux besoins généraux de l'analyse transcendante. De là vient qu'en dépit des avantages qu'elle offre, au point de vue algébrique et rationnel, elle n'a pu prévaloir sur la méthode infinitésimale. Serons-nous plus heureux dans l'essai que nous tentons pour reconstruire la méthode des fluxions sous une forme qui la généralise, la complète et la simplifie jusqu'à la rendre supérieure à toutes les méthodes connues. Nous croyons pouvoir l'espérer, sans trop de présomption. Déjà, depuis dix ans, nous n'avons pas cessé d'appliquer notre méthode, et nulle question ne s'est jamais offerte, que nous n'ayons pu l'aborder et la résoudre avec une facilité toujours au moins égale, et souvent supérieure, à celle que donne la méthode infinitésimale. C'est là que nous puisons notre confiance. Toutefois, nous savons combien la considération habituelle des quantités prétendues infiniment petites rend la notion de continuité difficile à saisir : combien aussi l'on trouve commode de se tenir à des procédés qu'un long usage a rendus familiers. Ces conditions fâcheuses ne nous découragent point. Il n'est, sans doute, aucun géomètre qui se représente l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe comme croissant d'une manière discontinue, par des changements brusques et infiniment petits, déterminant des points isolés

avec des vides intermédiaires. Là donc, on est forcé d'admettre la variation continue. Dès lors, il y a contradiction évidente à l'exclure dans tous les autres cas où elle subsiste nécessairement de la même façon. Que l'on veuille bien y réfléchir; que l'on fasse quelques efforts pour rompre avec d'anciens errements; que l'on ne recule pas devant les premières difficultés toujours inévitables dans une voie nouvelle : alors, pensons-nous, ce qui serait facile pour de jeunes intelligences, auxquelles une direction différente n'aurait point encore été imprimée, le deviendra de même, et à un bien plus haut degré, pour des esprits déjà initiés à toutes les ressources des combinaisons géométriques.

CHAPITRE PREMIER.

DÉMONSTRATION A PRIORI DE L'ÉQUATION FONDAMENTALE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

1. Soit une fonction quelconque

$$y = f(x).$$

La variable x croissant d'une manière continue entre certaines limites que je désignerai par x_0 et x_p , il peut arriver que les valeurs correspondantes de la fonction constituent un système unique, ou plusieurs systèmes simultanés et distincts. Dans le cas où la fonction admettrait plusieurs systèmes de valeurs, nous imaginerons que l'on prenne à part l'un quelconque de ces systèmes, et qu'on le considère isolément, de la même façon que s'il subsistait seul. Nous supposerons, en outre, que le système considéré est et demeure *essentiellement* continu pour toute valeur de x prise à partir de x_0 jusqu'à x_p . Il suit de là que, dans l'étendue de cet intervalle, la fonction y doit être considérée comme soustraite à tout changement brusque, et comme affectant toujours une valeur unique, réelle et déterminée.

2. Lorsque nous disons de la fonction y qu'elle affecte une valeur réelle et déterminée, nous entendons exprimer que la valeur dont il s'agit est *effectivement atteinte* par la fonction, et, qu'en conséquence, elle ne se réduit pas à une simple *limite*, vers laquelle la fonction serait convergente. Pour bien faire comprendre le sens de cette remarque, sur laquelle nous devons insister, nous prendrons pour exemple la fonction particulière

$$(1). \dots\dots\dots y = x \sin \frac{1}{x}.$$

Cette fonction est continue pour tout intervalle où la variable x demeure constamment, soit positive, soit négative. Néanmoins, elle doit être considérée comme présentant une solution de continuité correspondante à $x = 0$.

Lorsqu'on perd de vue l'impossibilité radicale accusée par le symbole $\frac{1}{0}$, et qu'on traite l'équation (1), sans tenir compte de cette impossibilité, l'on est conduit à confondre, parmi les *valeurs effectives* de la fonction $x \sin \frac{1}{x}$, la *limite* zéro vers laquelle elle converge, à mesure que la variable x décroît indéfiniment. On peut alors ne point apercevoir la solution de continuité mentionnée ci-dessus, ou bien estimer qu'il n'y a pas lieu d'y avoir égard. Une simple remarque suffira pour montrer que la question n'est point indifférente, et qu'on doit en réalité mettre le plus grand soin à distinguer les *valeurs effectives* de ces autres valeurs, qu'on peut désigner sous le nom de *valeurs limites*, en rappelant ainsi qu'elles restent en dehors de la suite formée par les premières.

Supposons, en effet, que, dans l'exemple choisi, la valeur $y = 0$, qui, par hypothèse, répond à $x = 0$, puisse être considérée, non pas seulement comme une *valeur limite*, mais bien comme une *valeur effective*. Il s'en suivra que la courbe représentée par l'équation (1) atteint l'origine des coordonnées, et que par suite elle comporte nécessairement un tracé continu ayant cette même origine pour point de départ. Or, il est évident qu'un pareil tracé est absolument impossible, puisque rien ne détermine si c'est en s'élevant au-dessus de l'axe des x , ou, au contraire, en s'abaissant au-dessous, qu'il devrait être commencé. On voit donc que la valeur

$y = 0$ qui répond à $x = 0$ n'est en réalité qu'une *valeur-limite* et qu'il serait *absurde* de lui attribuer le caractère d'une *valeur effective*.

3. La distinction que nous venons d'établir ne devra point être perdue de vue dans tout ce qui suivra. Elle est ici doublement importante; d'abord en ce qui concerne l'exacte définition de la *continuité*, et eu égard aux réserves à faire par rapport aux *valeurs-limites* qui peuvent se présenter accidentellement; ensuite, en ce qui concerne l'objet principal de cette étude, savoir :

1° La démonstration rigoureuse et complète de l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

2° La détermination précise du sens à attribuer à cette équation, et plus particulièrement encore à celle qui s'en déduit sous la forme

$$dy = f'(x) dx,$$

celle-ci devenant la base du calcul différentiel et la clef de toutes les applications de l'analyse transcendante.

4. Aux indications déjà données, concernant la variation de la fonction y , dans l'intervalle compris entre x_0 et x_p , nous ajouterons la suivante :

Constamment variable avec x , et partant de la valeur effective qui répond à x_0 , la fonction y ne peut changer d'abord que par augmentation ou par diminution. Si c'est en croissant qu'elle varie à l'origine, il faut qu'elle continue de croître toujours, ou si elle cesse de croître pour devenir décroissante, ce n'est qu'à partir d'une certaine valeur, plus grande à la fois que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement. Cette valeur, qu'on peut désigner sous le nom de *valeur maxima*, est nécessairement distincte de la valeur initiale y_0 . Elle comprend donc entre elle et celle-ci une infinité de valeurs intermédiaires, que la fonction y a dû successivement franchir, et qui, par conséquent, répondent à un certain intervalle $x_1 - x_0$. Dans toute l'étendue de cet intervalle, la fonction y est

demeurée continûment croissante; au delà elle décroît, soit constamment, soit jusqu'à une certaine valeur, moindre que celles qui la précèdent et la suivent immédiatement, et qu'on peut désigner sous le nom de *valeur minima*. Ainsi succède au premier intervalle $x_1 - x_0$, un second intervalle $x_2 - x_1$, où la fonction reste toujours décroissante. A ce second intervalle peut succéder un troisième, où la fonction redevienne croissante, comme elle l'était dans le premier; puis un quatrième, où elle décroisse comme elle l'a fait dans le second, et ainsi de suite jusqu'à épuisement de l'étendue totale à considérer, $x_p - x_0$.

Il est visible que les mêmes déductions, prises en sens inverse, s'appliquent au cas où la fonction décroît d'abord, au lieu de commencer par croître, comme nous l'avons supposé tout à l'heure. On doit donc admettre que si la fonction y n'est pas constamment croissante ou constamment décroissante dans l'intervalle $x_p - x_0$, néanmoins cet intervalle se subdivise nécessairement en un nombre limité d'intervalles plus petits, et pour chacun desquels l'une ou l'autre de ces deux conditions subsiste alternativement. Cela posé, il suffit évidemment que l'intervalle primitif $x_p - x_0$ soit convenablement restreint, pour que, en même temps, l'on soit autorisé à admettre que, dans toute l'étendue de cet intervalle, la fonction y ne fait que croître ou que décroître d'une manière continue.

D'après ce qui précède, il nous est permis d'ajouter, qu'aux conditions qu'elle est supposée remplir, la fonction y joint celle d'être toujours croissante, ou toujours décroissante dans l'intervalle considéré. Que la fonction croisse ou décroisse, pourvu qu'elle ne cesse pas de croître toujours ou de toujours décroître, les déductions restent identiquement les mêmes. Il suffit donc de traiter l'un ou l'autre de ces deux cas; nous choisirons le premier, c'est-à-dire celui où la fonction demeure constamment croissante dans l'intervalle où s'accomplit la variation que l'on considère.

5. En résumé, la fonction

$$(2) \dots\dots\dots y = f(x),$$

nous est donnée comme étant continue et constamment croissante dans

l'intervalle $x_p - x_0$, où pour chaque valeur attribuée à x , elle n'affecte jamais qu'une valeur effective, unique, réelle et déterminée.

Soient x et $x + h$, deux valeurs quelconques comprises entre les valeurs extrêmes x_0 et x_p . Si, dans l'équation (2), l'on remplace x par $x + h$, et qu'on désigne par Δy l'accroissement correspondant de la fonction, il vient

$$(3). \quad y + \Delta y = f(x + h).$$

et, soustrayant, membre à membre, l'équation (2) de l'équation (3),

$$(4). \quad \Delta y = f(x + h) - f(x).$$

Divisons l'accroissement de la fonction par l'accroissement de la variable, désigné indifféremment, soit par h , soit par Δx , nous aurons pour résultat

$$(5). \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

et comme l'équation (5) ne peut se déduire de l'équation (4), qu'elle remplace, que dans le cas où le diviseur, introduit à la fois dans les deux membres, est un nombre, nous ferons observer qu'il nous est absolument interdit de nous placer, relativement à l'équation (5), dans l'hypothèse où ce diviseur s'annulerait.

Tout ce qui précède étant bien entendu, et restant toujours présent à la pensée, comme point de départ des déductions qui vont suivre, nous allons procéder à la recherche analytique des diverses conditions que peut subir le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à la variable, l'on fait décroître l'accroissement h de manière qu'il converge indéfiniment vers zéro.

Recherche des diverses conditions que peut subir le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable.

6. En général, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dépend à la fois de x et de h . On conçoit néanmoins qu'il puisse être constant, ou du moins ne dépendre que de l'une ou de l'autre de ces deux quantités.

Examinons d'abord les cas les plus simples, et, en premier lieu, celui où le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé constant, indépendamment de toute valeur attribuée soit à h , soit à x .

PREMIER CAS.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé indépendant de x et de h .

7. Dans ce cas particulier l'on a évidemment,

$$f(x + h) - f(x) = C.h,$$

C étant une constante absolue. De là résulte,

$$(6). \quad f(x + h) = f(x) + C.h,$$

et comme le premier membre de l'équation (6) ne change point lorsqu'on y remplace en même temps x par h et h par x , il s'ensuit que la même condition doit nécessairement subsister pour le second. On a donc aussi;

$$f(x) + C.h = f(h) + C.x,$$

ou, ce qui revient au même :

$$(7). \quad f(x) - C.x = f(h) - C.h.$$

La simple inspection de l'équation (7) montre clairement que la diffé-

rence $f(h) - Ch$, égale à $f(x) - Cx$, doit demeurer constante indépendamment de toute valeur attribuée, soit à h , soit à x . On a donc :

$$(8) \quad \dots \dots \dots f(h) - Ch = C',$$

C' étant une constante absolue. De là résulte en substituant,

$$(9) \quad \dots \dots \dots f(x) = Cx + C'.$$

Les équations (8) et (9) conduisent toutes deux à un seul et même théorème, susceptible d'être énoncé, comme il suit :

Lorsque, pour un intervalle quelconque, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ reste égal à C , indépendamment de toute valeur attribuée, soit à x , soit à h , la fonction y se résout pour ce même intervalle en une fonction linéaire de la forme

$$y = Cx + C'.$$

Il est d'ailleurs visible que la réciproque subsiste également, c'est-à-dire que pour toute fonction linéaire de cette forme, l'on a nécessairement

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C = \text{const.}$$

8. Le même mode de démonstration conduit à cet autre théorème.

Lorsque les accroissements de deux fonctions d'une même variable x , sont égaux pour toute l'étendue d'un même intervalle quelconque Δx , la différence des fonctions est constante ou nulle dans toute cette étendue.

Soient, en effet, $f(x)$ et $F(x)$ les deux fonctions dont il s'agit. On a par hypothèse

$$f(x + h) - f(x) = F(x + h) - F(x).$$

De là résulte d'abord,

$$f(x + h) - F(x + h) = f(x) - F(x),$$

puis comme ci-dessus :

$$f(x) - F(x) = f(h) - F(h) = \text{const} = C'. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

DEUXIÈME CAS.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé indépendant de h .

9. Supposons maintenant que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit indépendant de h ; il viendra

$$(10). \quad f(x + h) - f(x) = C.h.$$

C étant une quantité qui ne varie point avec h , mais qui peut dépendre de la variable x .

Si dans l'équation (10) nous remplaçons x par $x + h$, nous aurons :

$$(11). \quad f(x + 2h) - f(x + h) = C.h.$$

C_1 étant ce que devient C , lorsqu'on y remplace x par $x + h$.

Les équations (10) et (11), ajoutées membre à membre, donnent.

$$(12). \quad f(x + 2h) - f(x) = (C + C_1) h.$$

D'un autre côté, si l'on opère directement sur l'équation (10) et qu'on y remplace h par $2h$, l'on a :

$$(13). \quad f(x + 2h) - f(x) = 2C.h.$$

Il vient donc en vertu des équations (12) et (13),

$$C + C_1 = 2C,$$

et par suite

$$(14). \quad C_1 = C.$$

Par hypothèse, C est indépendant de h et peut dépendre de x . Si C dépend de x sans dépendre de h et qu'on y remplace x par $x + h$, la quantité C ainsi obtenue, devient nécessairement dépendante de h . L'égalité (14)

prouvant que C_1 ne diffère pas de C , il en résulte : 1° que C_1 ne dépend pas de h ; 2° que C ne dépend pas de x .

Concluons, que, pour tout intervalle où le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne dépend pas de h , ce rapport est en même temps indépendant de x .

TROISIÈME CAS.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est supposé indépendant de x .

10. Supposons en dernier lieu que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit indépendant de x ; nous aurons,

$$(15). \quad \dots \dots \dots f(x+h) - f(x) = C.h.$$

C étant une quantité qui ne dépend pas de x mais qui peut dépendre de h .

Soit $h_i = \frac{h}{m}$, m étant un nombre entier quelconque, et C_i ce que devient C lorsque, dans l'équation (15), on remplace h par h_i . On a d'abord :

$$(16). \quad \dots \dots \dots f(x+h) - f(x) = C.h,$$

puis substituant à x les valeurs successives $x + h, x + 2h, x + 3h$, etc.
 $x + (m-1)h$.

$$(17). \quad \begin{cases} f(x+2h_1) - f(x+h_1) = C_1 h_1 \\ f(x+3h_1) - f(x+2h_1) = C_1 h_1 \\ f(x+[m-1]h_1) - f(x+[m-2]h_1) = C_1 h_1 \\ f(x+mh_1) - f(x+[m-1]h_1) = C_1 h_1 \end{cases}$$

Les équations (16) et (17) ajoutées membre à membre donnent :

$$(18). \quad \dots \dots \dots f(x + mh_1) - f(x) = m C_1 h_1.$$

ou remplaçant mh_i , par h .

$$(19). \quad \dots \dots \dots f(x+h) - f(x) = C \cdot h.$$

La comparaison des équations (15) et (19) conduit à l'égalité:

$$C_1 = C.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par h' une valeur quelconque admissible pour h et telle que l'on ait $h' = nh_1$, il est évident qu'en opérant sur n comme on l'a fait sur m , on trouverait au lieu de l'équation (18),

$$f(x + nh_1) - f(x) = nC_1h_1,$$

c'est-à-dire

$$f(x + h') - f(x) = C_1h',$$

ou remplaçant C_1 par C , qui lui est égal,

$$(20) \quad \dots \dots \dots f(x + h') - f(x) = Ch'.$$

Cela posé, imaginons que dans l'équation (15) on remplace h par h' et désignons par C' , ce que devient C par suite de cette substitution; nous aurons,

$$(21) \quad \dots \dots \dots f(x + h) - f(x) = C'h.$$

Les équations (20) et (21) donnent

$$C = C',$$

et par conséquent, eu égard à l'équation (15),

$$(22) \quad \dots \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{f(x + h') - f(x)}{h'} = \text{const} = C.$$

L'équation (22) montre que, pour toute valeur h' commensurable avec h , la quantité C demeure constante. Eu égard à la continuité de la fonction y , cette circonstance suffit pour que cette condition s'étende d'elle-même aux valeurs de h' qui ne seraient point commensurables avec h .

On voit donc que C est une constante absolue et qu'en conséquence le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne peut être indépendant de la variable x sans l'être en même temps de l'accroissement h .

11. D'après ce qui précède nous sommes en droit de poser la conclusion suivante :

Abstraction faite du cas particulier et unique présenté par la fonction linéaire

$$y = Cx + C'.$$

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est une fonction qui dépend, à la fois et toujours, des deux quantités x et h .

Ce premier point établi, laissons de côté le cas simple des fonctions linéaires, et cherchons à reconnaître et à déterminer, d'une manière précise, ce qui arrive en général, lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à x , l'accroissement h converge indéfiniment vers zéro.

Étude des diverses conditions que peut offrir la variation du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, la fonction y n'étant pas linéaire, et l'accroissement $h = \Delta x$ convergeant vers zéro.

12. Nous commencerons cette étude par deux observations importantes. La première consiste en ce que, pour chaque valeur attribuée d'une part à la variable x , d'autre part à l'accroissement h , le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ affecte toujours une valeur unique, réelle et déterminée. La seconde, en ce que ce même rapport est essentiellement continu, relativement à chacune des quantités x et h , c'est-à-dire que, variant avec ces quantités, il ne peut jamais subir aucun changement brusque, tant que l'une ou l'autre ne fait que croître ou décroître avec continuité.

Nous nous bornerons à démontrer la dernière de ces propositions, l'énoncé de la première suffisant pour en constater l'exactitude évidente.

Soit i une quantité moindre que h , et d'ailleurs aussi petite qu'on voudra; si, d'abord, on remplace x par $x + i$ dans le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on aura pour expression du changement subi par ce rapport

$$(1). \quad \frac{f(x+i+h) - f(x+i)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+i+h) - f(x+h) - [f(x+i) - f(x)]}{h}.$$

On trouverait de même, en remplaçant h par $h + i$, que le changement correspondant a pour expression

$$(2). \frac{f(x+h+i)-f(x)}{h+i} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(x+h+i)-f(x+h)}{h+i} - \frac{i}{h+i} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Or il est manifeste que chacune des deux différences (1) et (2) converge indéfiniment vers zéro en même temps que i ; il est donc inadmissible que pour aucune valeur attribuée, soit à x , soit à h , le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ puisse jamais subir aucun changement brusque, alors que l'une ou l'autre des quantités x et h ne fait que croître ou décroître d'une manière continue.

15. Lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à x , l'accroissement h converge vers zéro, il est visible que le rapport $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se trouve nécessairement assujéti à remplir l'une ou l'autre des quatre conditions suivantes :

- 1° Croître sans limites;
- 2° Converger vers une limite constante;
- 3° Osciller sans fin entre plusieurs limites;

4° Converger vers une limite qui dépend de la valeur attribuée à x et change avec cette valeur.

On conçoit que, tant qu'il s'agit exclusivement d'une ou de plusieurs valeurs particulières attribuées à la variable, l'une ou l'autre de ces quatre conditions puisse également se réaliser. En est-il de même pour une suite de valeurs qui se succéderaient continûment, ou sans écart assignable, dans toute l'étendue d'un intervalle quelconque déterminé? Tel est le point principal que nous avons actuellement à résoudre; nous le traiterons en nous plaçant d'abord et successivement dans chacune des trois premières hypothèses. Il suffira d'ailleurs que nous raisonnions sur des intervalles où les valeurs de x à considérer se succèdent continûment; les résultats obtenus dans ce cas s'étendent d'eux-mêmes à celui où l'on imagine que, sans être continues, ces valeurs ne conservent, néanmoins, entre elles que des écarts indéfiniment petits.

1^{re} QUESTION À RÉSOUDRE.

Est-il possible que, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle quelconque déterminé, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit et demeure indéfiniment croissant, tandis que h converge vers zéro?

14. Soient x_i et x_p , deux valeurs de x prises dans l'intervalle que l'on considère, et où, par hypothèse, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ devient indéfiniment grand à mesure que h converge vers zéro. Si l'on désigne par x_i une valeur quelconque intermédiaire et par h_i une valeur de h suffisamment petite, on pourra toujours faire en sorte que l'on ait

$$(1) \quad \frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{h_i} > K.$$

K étant une quantité dont on dispose et qu'on peut prendre aussi grande qu'on voudra. La valeur du rapport $\frac{f(x_p) - f(x_i)}{x_p - x_i}$ étant déterminée, nous supposons que l'on ait attribué à K une valeur quelconque, satisfaisant à l'inégalité

$$(2) \quad K > \frac{f(x_p) - f(x_i)}{x_p - x_i}.$$

Partons de la valeur x_i prise à l'origine de l'intervalle que l'on considère; posons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i + h_i = x_1 \\ x_1 + h_1 = x_2 \\ \dots \dots \dots \\ x_{n-1} + h_{n-1} = x_n \\ x_n + h_n = x_{n+1} \end{array} \right.$$

et faisons pour les valeurs (x_1, h_1) , ainsi que pour les suivantes (x_2, h_2) , (x_3, h_3) , etc., ce que j'ai indiqué pour la valeur générale x_i . Nous aurons dans les mêmes conditions que pour l'inégalité (1)

2^{me} QUESTION A RÉSOUDRE.

Est-il possible que, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle quelconque déterminé, et tandis que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ soit et demeure convergent vers une seule limite, constamment la même?

15. Soient x_i et x_p deux valeurs de x prises dans l'intervalle que l'on considère et où l'on suppose que, tandis que h décroît indéfiniment, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse pas de converger vers une seule et même limite constante C . Si l'on désigne par x , une valeur quelconque intermédiaire, et par h , une valeur de h suffisamment petite, on pourra toujours faire en sorte que l'on ait

$$(1) \dots\dots\dots \frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{h_i} = C + \eta_i,$$

η_i étant moindre qu'une certaine quantité η dont on dispose et qu'on peut d'ailleurs prendre aussi petite qu'on voudra. Partons de la valeur x_i prise à l'origine de l'intervalle que l'on considère; posons comme tout à l'heure

$$(2) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x_i + h_i = x_1, \\ x_1 + h_1 = x_2, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} + h_{n-1} = x_n, \\ x_n + h_n = x_{n+1}, \end{array} \right.$$

et faisons pour les valeurs conjuguées (x_i, h_i) , ainsi que pour les suivantes (x_2, h_2) , (x_3, h_3) , etc., ce que j'ai indiqué pour les valeurs générales (x_i, h_i) . Nous aurons dans les mêmes conditions que pour l'égalité (1).

$$(3) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{h_i} = C + \eta_i, \\ \frac{f(x_i + h_i) - f(x_i)}{h_i} = C + \eta_i, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{f(x_{n-1} + h_{n-1}) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}} = C + \eta_{n-1}, \\ \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} = C + \eta_n. \end{array} \right.$$

Multipliant la première des équations (5) par h_1 , la seconde par h_2 , et ainsi de suite, puis ajoutant membre à membre, il vient, eu égard aux équations (1),

$$(4) \quad \dots \quad f(x_{n+1}) - f(x_1) = (h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n) C + h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2 + \text{etc.} + h_n \eta_n.$$

On a, d'ailleurs, en vertu des mêmes équations,

$$x_1 + h_1 + h_2 \text{ etc.} + h_n = x_{n+1}$$

et il est visible que la valeur x_{n+1} peut être supposée précisément égale à x_p . On peut donc écrire

$$h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n = x_p - x_1,$$

et substituant dans l'équation (4)

$$(5) \quad \dots \quad f(x_p) - f(x_1) = C(x_p - x_1) + h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2 \text{ etc.} + h_n \eta_n.$$

Par hypothèse chacune des valeurs $\eta_1, \eta_2, \text{etc.}$, est moindre qu'une certaine quantité η dont on dispose et qu'on peut prendre aussi petite qu'on veut. On a donc d'abord

$$h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2 + \text{etc.} + h_n \eta_n < (h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n) \eta < (x_p - x_1) \eta.$$

Il vient ensuite, eu égard à l'égalité (5)

$$(6) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} = C + \mu \eta.$$

μ étant moindre que un.

Cela posé, il est évident que si les quantités C et $\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1}$, toutes deux constantes, n'étaient point égales, l'équation (6) où η peut être supposé indéfiniment petit, serait impossible. On a donc nécessairement

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} = C,$$

et par suite

$$y = y_1 = y_2, \text{ etc.} = 0.$$

Concluons qu'il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ puisse converger toujours vers une même limite constante C , à mesure que h décroît indéfiniment.

16. L'hypothèse admise ci-dessus, en ce qui concerne l'équation (1), implique comme conséquence nécessaire que, dans toute l'étendue de l'intervalle considéré, l'on a constamment

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{const} = C;$$

et puisque cette condition n'est réalisable, ainsi que nous l'avons établi précédemment, que pour le cas de la fonction linéaire

$$f(x) = Cx + C',$$

nous sommes en droit de poser, comme rigoureusement démontré, le théorème suivant :

Lorsque, dans toute l'étendue d'un intervalle quelconque, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable est reconnu tel qu'il diffère aussi peu qu'on veut d'une limite constante C , à mesure que l'accroissement de la variable converge vers zéro, il est démontré, par là même, que ce rapport est invariable, et qu'il a, pour expression numérique, cette même valeur C , considérée, d'abord, comme une simple limite.

Ce théorème implique d'ailleurs, comme conséquence immédiate, le corollaire suivant :

Si la constante C considérée comme limite est égale à zéro, la fonction supposée se résout elle-même en une quantité constante C' .

Le lecteur remarquera sans doute que, dans tout ce qui précède, nous n'avons fait que reproduire, avec certaines modifications, des démonstra-

tions depuis longtemps connues. Dans ce qui suit, les questions à résoudre sont infiniment plus délicates; nous croyons d'ailleurs, qu'elles sont tout à fait neuves et qu'un intérêt assez considérable s'attache à leur solution.

3^{me} QUESTION A RÉSOUDRE.

Est-il possible que, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle quelconque déterminé, et tandis que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oscille constamment et sans fin entre plusieurs limites distinctes?

17. Imaginons que, pour une valeur particulière attribuée à x , et tandis que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ croisse et décroisse alternativement, de manière à osciller sans fin entre certaines limites.

Deux cas répondent à cette hypothèse, selon que les limites dont il s'agit se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, ou qu'au contraire elles conservent entre elles un écart déterminé.

Dans le premier cas, les choses se passent de la même façon que si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ convergait vers la valeur finale, commune aux deux limites. Les déductions précédentes s'appliquent d'elles-mêmes à ce cas et il n'y a pas lieu de nous y arrêter.

Dans le second cas, il semble que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cesse de pouvoir être considéré comme convergeant vers une limite quelconque déterminée. Examinons ce qui se passe alors. Par hypothèse, à mesure que h converge vers zéro, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ subit une alternative non interrompue d'accroissements et de décroissements successifs. Lorsque le rapport croît, l'accroissement qu'il subit persiste jusqu'à une certaine valeur *maxima*, à partir de laquelle le décroissement commence. De même, lorsque le rapport décroît, le décroissement qu'il subit persiste jusqu'à une certaine valeur *minima*, à partir de laquelle l'accroissement recommence; et ainsi de suite, sans que ces alternatives cessent de se reproduire en nombre toujours inépuisable. Il suit de là que les valeurs *maxima* et *minima*, qui se succèdent tour à tour, répondent à des valeurs de h qui deviennent de

plus en plus petites, et qui, par conséquent, se rapprochent indéfiniment les unes des autres.

Soit M une des valeurs *maxima* affectées par le rapport $\frac{\partial y}{\partial x}$. Cette valeur peut être choisie de manière à surpasser toutes celles qui viennent à sa suite, à mesure que h décroît indéfiniment, ou bien il faut que cette suite ne cesse pas d'offrir des valeurs *maxima* toujours croissantes, et convergeant ainsi vers une limite supérieure.

Il existe donc nécessairement, ou bien une *limite supérieure* vers laquelle les valeurs *maxima* convergent en croissant, ou bien une valeur *maxima* M qui surpasse toutes celles qui la suivent.

Examinons cette dernière hypothèse.

Si, parmi les valeurs *maxima* considérées dans l'ordre où elles se succèdent, à mesure que h converge vers zéro, il en est une, M , plus grande que les suivantes, il faut de même et nécessairement que celles-ci comprennent, soit une valeur *maxima* moindre que toutes les autres, soit une suite de valeurs *maxima* constamment décroissantes, et convergeant ainsi vers une *limite inférieure*.

Dans le premier cas, M' étant la valeur *maxima* supposée moindre que toutes les suivantes, il est visible que celles-ci restent comprises entre M et M' ; il faut donc qu'elles finissent, ou par converger vers une certaine limite intermédiaire, ou par osciller indéfiniment entre deux limites, l'une *supérieure* et tout au plus égale à M , l'autre *inférieure* et au moins égale à M' .

Dans le second cas, M' étant la limite inférieure vers laquelle les moindres valeurs *maxima* convergent en décroissant, l'on voit de même que, prises dans leur ensemble, les valeurs *maxima* doivent nécessairement finir, soit par converger vers la limite M' , soit par osciller sans fin entre cette limite et une *limite supérieure* tout au plus égale à M .

Observons que, dans le cas d'une oscillation persistante entre deux limites déterminées et distinctes, les valeurs *maxima* se succèdent alternativement, de manière à présenter deux suites, dont l'une converge vers la *limite supérieure*, et l'autre vers la *limite inférieure*; à chacune de ces deux suites correspond une série distincte de valeurs de h indéfiniment décrois-

santes. Nous supposons que l'on prend à part et que l'on considère isolément la première série, c'est-à-dire celle qui répond aux plus grandes valeurs maxima.

D'après ce qui précède il est aisé de voir que, dans tous les cas possibles, les plus grandes valeurs maxima finissent nécessairement par former une suite qui converge, en croissant ou en décroissant, vers une certaine limite L .

On démontrerait de même que, dans tous les cas possibles, les plus petites valeurs minima finissent nécessairement par former une suite qui converge, en croissant ou en décroissant, vers une certaine limite l .

Par hypothèse, les limites L et l conservent entre elles un écart déterminé. Il est clair, d'ailleurs, qu'en prenant h suffisamment petit, l'on peut toujours obtenir pour le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ des valeurs aussi rapprochées qu'on veut de l'une ou l'autre de ces deux limites.

18. Cela posé, imaginons que ce ne soit plus seulement pour une valeur particulière attribuée à x que le décroissement indéfini de h détermine, dans les valeurs correspondantes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, une oscillation sans fin, avec convergence alternative vers deux limites distinctes. Concevons que cette même condition subsiste pour toute l'étendue d'un certain intervalle. Dans cette nouvelle hypothèse, il importe avant tout de reconnaître si les limites L et l , qui sont déterminées pour chaque valeur de x , subissent ou non des changements brusques, lorsque la variable croît d'une manière continue.

Voyons d'abord ce qui se passe relativement à la limite supérieure L .

Soit x_1, x_2, x_3 , etc., la suite des valeurs de x à considérer, et L_1, L_2, L_3 , etc., les valeurs correspondantes de la limite supérieure L . A chacune des valeurs x_1, x_2, x_3 , etc., répond un accroissement h_1, h_2, h_3 , etc., tel que, pour cet accroissement et pour une infinité d'autres de plus en plus petits, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ comporte une suite de valeurs qui satisfont toutes à la condition générale,

$$(1) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L + \epsilon,$$

ε étant une quantité qui décroît indéfiniment avec h et qu'on peut supposer aussi rapprochée qu'on voudra de zéro.

Parmi les valeurs h_1, h_2, h_3 , etc., il en est une moindre que toutes les autres. Nous la désignerons par h , et, disposant jusqu'à un certain point de la valeur h qui figure dans l'équation précédente, nous la prendrons telle que l'on ait toujours

$$h < h_0.$$

L'équation (1) appliquée à la valeur particulière x_n donne

$$(2). \quad \dots \dots \dots \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} = L_n + \varepsilon_n.$$

Soit i une quantité moindre que h , et d'ailleurs aussi rapprochée qu'on voudra de zéro; si, dans l'équation (2), l'on remplace x_n par $x_n + i$, le premier membre de cette équation subira un changement qu'on peut supposer aussi petit qu'on veut, et toujours d'autant moindre que la quantité i sera elle-même plus petite. Ce changement étant exprimé par ξ , il vient

$$\frac{f(x_n + i + h) - f(x_n + i)}{h} = L_n + \varepsilon_n + \xi.$$

D'un autre côté, si l'on désigne par x_p la valeur x_{n+1} , et qu'on observe que la valeur L_p correspondante à x_p se réalise avec tel degré d'approximation qu'on veut, pour une valeur h_p supérieure à h , on voit clairement que le rapport $\frac{f(x_p + h) - f(x_p)}{h}$ doit être inférieur à L_p , ou, s'il est supérieur à cette limite, qu'il ne peut la dépasser que d'une certaine quantité tout au plus égale à celle qui fixe le degré d'approximation voulu ε_p . On a donc nécessairement

$$\frac{f(x_p + h) - f(x_p)}{h} = L_n + \varepsilon_n + \xi \leq \text{ou} \leq L_p + \varepsilon_p.$$

De là résulte

$$(3) \quad \dots \dots \dots L_n - L_p \leq \text{ou} \leq \varepsilon_p - \varepsilon_n - \xi.$$

Or, en premier lieu, si l'on prend h suffisamment petit, chacune des quantités η_n , η_p sera aussi rapprochée qu'on voudra de zéro; si d'ailleurs on imagine que la quantité i décroisse indéfiniment, il en sera de même de la quantité ξ . Il est donc démontré que, s'il y a excès de L_n sur L_p , cet excès ne peut que décroître indéfiniment, à mesure que les valeurs x_p et x_n vont en se rapprochant l'une de l'autre. La réciproque se démontre de la même manière, ainsi que nous allons le faire voir, en ne reproduisant toutefois les points principaux des déductions précédentes.

Concevons à cet effet que, procédant en sens inverse, l'équation (1) soit appliquée à la valeur x_p . Il viendra, en désignant par h' la valeur qu'il convient alors d'attribuer à h :

$$\frac{f(x_p + h') - f(x_p)}{h'} = L_p + \eta_p.$$

De là résulte comme ci-dessus,

$$(4) \quad \frac{f(x_p + i + h') - f(x_p + i)}{h'} = L_p + \eta_p + \xi'.$$

ξ' étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que i .

Mais le premier membre de l'équation (4) a évidemment pour valeur

$$\frac{f(x_n + h') - f(x_p)}{h'}.$$

Il ne peut donc qu'être inférieur à L_n , ou, s'il est supérieur à cette limite, il ne peut la dépasser que d'une certaine quantité tout au plus égale à η_n . On a ainsi :

$$L_p + \eta_p + \xi' \leq_{\text{m.o.}} L_n + \eta_n,$$

et, par conséquent,

$$L_p - L_n \leq_{\text{m.o.}} \eta_n - \eta_p - \xi'.$$

Il suit de là que, s'il y a excès de L_p sur L_n , cet excès ne peut que décroître indéfiniment à mesure que les valeurs x_n , x_p sont de plus en plus rapprochées. La

même proposition ayant déjà été établie en ce qui concerne l'excès de L_n sur L_p , il est actuellement visible que les deux limites L_n , L_p ne peuvent l'emporter l'une sur l'autre, et réciproquement, que d'une quantité indéfiniment décroissante avec i . *On ne peut donc point admettre que la limite supérieure L subisse, en général, aucun changement brusque, lorsque la variable x croît avec continuité.*

19. Le fait que nous venons de constater relativement à la limite supérieure L subsiste également en ce qui concerne la limite inférieure l . On le prouverait, au besoin, en suivant le même procédé de démonstration que nous venons de développer. Nous poursuivrons, sans nous arrêter à ce détail qui n'offre aucune difficulté nouvelle.

20. Après avoir reconnu que, dans l'hypothèse où nous raisonnons, les limites L et l varient continûment avec x , nous allons examiner si cette hypothèse elle-même est ou non compatible avec les conditions supposées remplies par la fonction y .

Pour plus de clarté, nous résumerons en quelques mots l'état de la question qu'il s'agit de résoudre.

On suppose que, pour toute l'étendue d'un certain intervalle, le décroissement indéfini de h détermine, dans les valeurs correspondantes du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, une oscillation sans fin avec convergence alternative vers deux limites L et l . Il est d'ailleurs prouvé que, si ces limites varient avec x , c'est d'une manière continue, c'est-à-dire sans subir aucun changement brusque. Cela posé, il s'agit de reconnaître si la supposition d'où l'on part est ou non compatible avec la continuité de la fonction y .

Soient x_i et x_p , deux valeurs de x prises dans l'intervalle que l'on considère, et assez rapprochées l'une de l'autre pour que de x_i à x_p les changements subis respectivement par chacune des limites L et l restent toujours extrêmement petits.

Si, pour une valeur quelconque intermédiaire x_s , l'on désigne par L_s et l_s les valeurs correspondantes des limites L et l , on aura généralement

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_s = L_i + \epsilon_s \\ l_s = l_i + \epsilon_s \end{array} \right.$$

x_e et h_e étant par hypothèse aussi petits qu'on voudra. Posons en général

$$(6) \quad \dots \dots \dots x_e + h_e = x_{e+1}.$$

Si la valeur h_e est convenablement choisie et d'ailleurs suffisamment petite, l'on peut écrire

$$(7) \quad \dots \quad \frac{f(x_e + h_e) - f(x_e)}{h_e} = L_e + \gamma_e = L_e + x_e + \gamma_e = L_e + \varepsilon_e.$$

γ_e différant aussi peu qu'on voudra de zéro, et par conséquent la quantité ε_e n'étant pas sensiblement supérieure à la quantité correspondante x_e .

Partons de la valeur x_1 , prise à l'origine de l'intervalle que l'on considère, et faisons pour cette valeur, ainsi que pour les suivantes x_2 , x_3 , etc., ce que je viens d'indiquer pour la valeur générale x_e , nous aurons dans les mêmes conditions que tout à l'heure, d'une part,

$$(8) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} x_1 + h_1 = x_2, \\ x_2 + h_2 = x_3, \\ \dots \dots \dots \\ x_{n-1} + h_{n-1} = x_n, \\ x_n + h_n = x_{n+1}. \end{array} \right.$$

et d'autre part

$$(9) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{f(x_1 + h_1) - f(x_1)}{h_1} = L_1 + \varepsilon_1, \\ \frac{f(x_2 + h_2) - f(x_2)}{h_2} = L_2 + \varepsilon_2, \\ \dots \dots \dots \\ \frac{f(x_{n-1} + h_{n-1}) - f(x_{n-1})}{h_{n-1}} = L_{n-1} + \varepsilon_{n-1}, \\ \frac{f(x_n + h_n) - f(x_n)}{h_n} = L_n + \varepsilon_n. \end{array} \right.$$

Multipliant la 1^{re} des équations (9) par h_1 , la 2^{me} par h_2 , etc., puis ajoutant membre à membre, il vient, eu égard aux équations (8) :

$$(10) \quad f(x_{n+1}) - f(x_1) = (h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n) L_1 + \eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \text{etc.} + \eta_n h_n.$$

On a, d'ailleurs, en vertu des mêmes équations (8)

$$(11) \quad x_1 + h_1 + h_2 + \text{etc.} + h_n = x_{n+1},$$

et il est visible que, si la valeur x_{n+1} n'est pas précisément égale à x_p , l'on peut cependant faire en sorte qu'elle en diffère indéfiniment peu. Posons en conséquence

$$(12) \quad x_{n+1} = x_p - i.$$

i étant une quantité dont on dispose, et qu'il est permis de supposer aussi rapprochée qu'on voudra de zéro.

De là résulte, en vertu de l'équation (11)

$$h_1 + h_2 \text{ etc.} + h_n = x_{n+1} - x_1 = x_p - i - x_1,$$

et par suite, en substituant dans l'équation (10),

$$(13) \quad \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = L_1 + \frac{\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \text{etc.} + \eta_n h_n}{x_p - i - x_1},$$

soit η la plus grande des valeurs $\eta_1, \eta_2, \text{etc.}$, l'on a

$$\eta_1 h_1 + \eta_2 h_2 + \text{etc.} + \eta_n h_n < (h_1 + h_2 + \dots + h_n) \eta < (x_p - i - x_1) \eta,$$

et par conséquent, l'équation (13) devient

$$(14) \quad \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = L_1 + \mu \eta,$$

μ étant une fraction.

D'un autre côté, l'on a évidemment

$$\frac{f(x_p) - f(x_1)}{x_p - x_1} - \frac{f(x_p - i) - f(x_1)}{x_p - i - x_1} = \xi,$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que i . Il vient donc enfin

$$(15). \quad \dots \dots \dots \frac{f(x_p) - f(x_i)}{x_p - x_i} = L_i + \mu\eta + \xi.$$

Cela posé, il est clair qu'en opérant sur la limite inférieure L_i , comme nous venons de le faire sur la limite supérieure L_i , l'on aurait de même

$$(16). \quad \dots \dots \dots \frac{f(x_p) - f(x_i)}{x_p - x_i} = L_i + \mu'\eta' + \xi'.$$

Des équations (15) et (16) l'on déduit immédiatement

$$L_i - L_i = \mu'\eta' + \xi' - \mu\eta - \xi.$$

Cette dernière relation est évidemment impossible, puisque, d'une part, on suppose un écart déterminé entre les constantes L_i , L_i , tandis que, d'autre part, il est prouvé que chacune des quantités ξ , ξ' , $\mu\eta$, $\mu'\eta'$ peut être rendue indéfiniment petite. Concluons en conséquence que, *il n'est aucun intervalle dans toute l'étendue duquel le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ puisse osciller sans fin entre deux limites distinctes, à mesure que h converge vers zéro.*

RÉSUMÉ.

21. La fonction $y = f(x)$ étant supposée continûment croissante ou continûment décroissante, dans un certain intervalle, et les valeurs qu'elle y prend étant toutes *effectives*, nous avons établi, relativement au rapport,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

1° qu'il ne peut être indépendant de l'une des quantités x ou h , sans l'être en même temps de l'autre;

2° Que, lorsque cette indépendance existe, la fonction est linéaire, et réciproquement;

3° Qu'abstraction faite de ce cas exceptionnel, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, dépendant à la fois de x et de h , varie continûment avec chacune de ces deux grandeurs, et affecte toujours, en même temps qu'elles, une valeur unique, réelle et déterminée.

Examinant, ensuite, ce qui arrive lorsque, pour une valeur quelconque attribuée à la variable, l'on fait décroître indéfiniment la quantité h , nous avons reconnu que si le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut accidentellement croître sans limites, ou bien converger vers une même limite constante, ou bien encore rester oscillant entre deux limites distinctes, il est néanmoins impossible qu'aucune de ces trois conditions ¹ subsiste d'une manière permanente, dans toute l'étendue d'une partie quelconque de l'intervalle considéré.

Si l'on supposait que, pour une certaine étendue, il s'agit, non pas de toutes les valeurs de x comprises dans cette étendue, mais néanmoins d'une suite de valeurs qui se succéderaient sans conserver entre elles aucune distance assignable, l'impossibilité que nous venons de rappeler subsisterait également. Cette extension des résultats établis par les démonstrations qui précèdent, se fait en quelque sorte d'elle-même, et sans qu'il soit besoin d'insister pour en faire ressortir la complète évidence.

Cela posé, observons qu'abstraction faite du cas exceptionnel présenté par les fonctions linéaires, *il faut nécessairement*, tandis que h converge vers zéro, que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ remplisse l'une ou l'autre des quatre conditions suivantes :

- 1° Croître sans limites;
- 2° Converger vers une limite constante;
- 3° Osciller sans fin entre deux limites distinctes;
- 4° Converger vers une limite variable avec x .

¹ Il est bien entendu qu'il ne s'agit point ici des fonctions linéaires. Pour ces fonctions, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est constant, indépendamment de toute valeur attribuée à h . Il n'y a donc point lieu d'examiner ce qui se passe, lorsque h converge vers zéro.

D'après ce qui précède, il n'est aucune étendue dans laquelle l'une quelconque des trois premières conditions puisse subsister constamment, pour des valeurs de x qui se succéderaient d'une manière continue, ou avec des écarts indéfiniment petits. Il suit de là que le contraire doit avoir lieu pour la quatrième. Supposons, en effet, que pour celle-ci, de même que pour chacune des autres, il n'existe point d'intervalle où elle soit *continûment* persistante; il est visible que, dans cette hypothèse, aucune distance assignable ne pourra jamais s'établir entre les valeurs de x qui réalisent l'une quelconque des trois premières conditions. Il faudra donc nécessairement que l'une ou plusieurs de celles-ci ne cessent point de subsister, soit d'une manière continue, soit pour des valeurs de x qui seraient indéfiniment rapprochées les unes des autres. Or, c'est là précisément ce qui a été démontré impossible.

Concluons :

1° Que, si dans la variation que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ subit à mesure que h converge vers zéro, l'une ou l'autre des trois premières conditions peut se réaliser, ce n'est jamais qu'accidentellement ou exceptionnellement, c'est-à-dire pour des valeurs de x qui demeurent isolées les unes des autres, et qui conservent entre elles un certain intervalle.

2° Que, dans toute l'étendue comprise entre deux quelconques de ces valeurs isolées et successives, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse point de converger constamment vers une limite déterminée et variable avec x .

22. Considérons l'un des intervalles compris entre deux de ces valeurs isolées et successives, pour lesquelles le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ croît indéfiniment, ou oscille sans fin entre deux limites distinctes. Si nous désignons par $f'(x)$ la limite vers laquelle ce même rapport converge dans toute l'étendue de cet intervalle, à mesure que h décroît indéfiniment, nous aurons

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

et nous pourrions écrire en conséquence

$$(17) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \eta,$$

η étant une quantité qui dépend de h et qui converge vers zéro en même temps que cet accroissement.

La limite $f'(x)$ prend, par rapport à la fonction donnée $f(x)$, le nom de fonction dérivée. L'indice, dont on affecte le signe représentatif de la fonction pour désigner la fonction dérivée, sert en même temps à distinguer celle-ci et à rappeler son origine.

25. Telle est la conclusion de la première partie de ce travail. Nous la compléterons en démontrant que la fonction désignée par $f'(x)$ est généralement continue.

Reprenons l'équation (17)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \eta.$$

Applicable à toute valeur de x , comprise dans l'un quelconque des intervalles définis ci-dessus, cette équation exprime que, pour chacune de ces valeurs, l'accroissement h comporte une certaine limite h' , à partir de laquelle la quantité η devient aussi petite qu'on veut, et ne fait d'ailleurs que décroître encore, à mesure que h converge vers zéro.

Considérons la suite des valeurs affectées par la limite h' , alors que la variable croît continûment de x_1 à x_p . Par hypothèse les valeurs x_1 , x_p , sont toutes deux comprises dans un seul et même intervalle répondant à l'équation (17). La condition exprimée par cette équation subsiste en conséquence pour toute l'étendue de la variation qui s'accomplit de x_1 à x_p , et il n'est aucune valeur intermédiaire x_n pour laquelle la limite h' puisse disparaître ou s'évanouir. Doit-on conclure de là que, parmi les valeurs affectées par h' , il n'en est aucune qui s'abaisse au-dessous d'un certain degré de grandeur assignable d'avance et numériquement exprimable; ou bien, au contraire, faut-il admettre que la moindre de ces valeurs peut devenir indéfiniment petite en même temps que la variable x converge vers certaines valeurs déterminées? Cette question curieuse n'a pas besoin d'être résolue pour l'objet que nous nous proposons. En effet, les deux conditions que nous venons d'énoncer sont évidemment les seules qui puissent se réaliser dans la variation subie par la limite h' ; il suffit

d'ailleurs de partager convenablement l'intervalle $x_p - x_1$, pour que la première subsiste seule et exclusivement dans chacune des subdivisions obtenues. Soit, par exemple, x_a, x_b, x_c , etc., les valeurs successives et *nécessairement isolées* pour lesquelles la limite h' converge vers zéro, en même temps que la variable x , supposée continûment croissante, se rapproche indéfiniment de l'une ou de l'autre de ces valeurs. Partant de la valeur x_1 , la limite h' a un certain degré de grandeur. Plus loin ce degré s'abaisse indéfiniment, à mesure que x converge vers x_a ; néanmoins, si près qu'on soit de la valeur x_a , il suffit de s'arrêter au point où l'on est parvenu, pour que, dans l'intervalle franchi depuis la valeur x_1 , la limite h' n'ait pas cessé d'être constamment supérieure à zéro d'une quantité déterminée et numériquement assignable. On voit donc clairement que, pour faire subsister cette même condition dans toute l'étendue de chacune des subdivisions successives $x_a - x_1, x_b - x_a, x_c - x_b$, etc., il suffit d'en exclure respectivement les valeurs extrêmes x_a, x_b, x_c , etc.

Cela posé, soit $x \pm i$ une suite continue de valeurs *s'écartant aussi peu qu'on voudra de x* , et toutes comprises dans l'une quelconque des subdivisions $x_a - x_1, x_b - x_a$, etc. On a d'abord

$$(17) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \eta;$$

puis remplaçant x par $x \pm i$, et désignant par η' la valeur que prend η .

$$(18) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x \pm i + h) - f(x \pm i)}{h} = f'(x \pm i) + \eta'.$$

De là résulte, en désignant par ξ la différence des premiers membres des équations (17) et (18),

$$f'(x \pm i) - f'(x) = \xi + \eta - \eta'.$$

Or, en premier lieu, il suffit que la valeur attribuée à h ne dépasse pas un certain degré de grandeur pour que, *indépendamment de toute valeur affectée par i dans la suite $x \pm i$* , les quantités η, η' restent aussi rapprochées

qu'on voudra de zéro. Si, d'ailleurs, et en second lieu, l'on imagine que la quantité i décroisse indéfiniment, il en est forcément de même de la quantité

$$\xi = \frac{f(x \pm i + h) - f(x \pm i)}{h} - \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Il est donc manifeste que la différence

$$f'(x \pm i) - f'(x) = \xi + \eta - \eta',$$

peut être rendue aussi petite qu'on veut, et, par conséquent, l'on ne saurait admettre que la fonction $f'(x)$ subisse aucun changement brusque de grandeur, lorsque la variable x , dont elle dépend, croît avec continuité dans l'une quelconque des subdivisions, $x_a - x_b$, $x_b - x_c$, $x_c - x_d$, etc.

24. Lorsqu'aux valeurs positives de l'accroissement h on substitue des valeurs négatives, rien n'est modifié ni dans les démonstrations qui précèdent, ni dans leurs conséquences. Veut-on s'en convaincre immédiatement? Il suffit d'observer que, pour toute variation accomplie dans un intervalle quelconque $x_p - x_1$, il y a identité entre les fonctions $f(x)$ et $f(x_1 + x_p - x)$, sauf inversion de l'ordre suivant lequel les valeurs se succèdent. Soit, en effet, x' et x'' deux valeurs conjuguées de la variable x pour lesquelles on ait de part et d'autre

$$x' = x_1 + x_p - x''.$$

Il viendra d'abord

$$f(x') = f(x_1 + x_p - x'').$$

et, comme il en résulte

$$x' - h = x_1 + x_p - x'' - h,$$

l'on aura ensuite

$$f(x' - h) = f[x_1 + x_p - (x'' + h)].$$

On voit ainsi qu'à partir de toute valeur commune des fonctions $f(x_1 + x_p - x)$ et $f(x)$, les changements opérés dans la première, par

accroissement de la variable, sont identiques avec ceux que subit la seconde pour un décroissement de la variable égal en grandeur à ce même accroissement. Or, il est démontré qu'on a, en général,

$$\frac{f(x_1 + x_2) - (x'' + h) - f(x_1 + x_2 - x'')}{h} = \varphi(x'') + \eta.$$

$\varphi(x)$ étant une fonction continue, et η une quantité qui converge vers zéro en même temps que h . On a donc identiquement, par voie de simple substitution

$$\frac{f(x' - h) - f(x')}{h} = \varphi(x_1 + x_2 - x') + \eta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x) - f(x - h)}{h} = F(x) + \eta$$

la fonction $F(x)$ étant généralement continue, et η convergeant vers zéro à mesure que h décroît indéfiniment.

25. Il est prouvé par ce qui précède que, si l'on fait converger vers zéro la quantité h , chacun des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ converge en général vers une certaine limite exprimée par une fonction continue de la variable x . On a donc d'une part,

$$(1) \dots \dots \dots \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \eta,$$

et d'autre part

$$(2) \dots \dots \dots \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = F(x) + \zeta.$$

les fonctions $f'(x)$ et $F(x)$ étant toutes deux continues, et chacune des quantités η , ζ , convergeant vers zéro en même temps que h .

Cela posé, deux cas sont possibles, selon que les fonctions $f'(x)$ et $F(x)$ se confondent, ou qu'au contraire, elles diffèrent.

Soient x_1 et x_2 deux valeurs aussi voisines qu'on voudra, et ne comprenant entre elles aucune de ces valeurs intermédiaires x_a, x_b , etc., dont la variable ne peut se rapprocher indéfiniment, sans qu'il y ait convergence vers zéro de la limite désignée plus haut par h' . Posons $h = x_2 - x_1$. Si dans l'équation (1) l'on remplace x par x_1 , il vient

$$(3). \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) + \eta;$$

de même, si dans l'équation (2) l'on remplace x par x_2 l'on a

$$(4). \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = F(x_2) + \zeta;$$

De là résulte immédiatement,

$$F(x_2) - f'(x_1) = \eta - \zeta.$$

et puisque chacune des quantités ζ, η , devient indéfiniment petite, à mesure que h converge vers zéro, il s'ensuit que $F(x_2)$ converge vers $f'(x_1)$, en même temps que x_2 vers x_1 . Il y a donc identité entre les deux fonctions $f'(x)$ et $F(x)$ pour toute l'étendue de chacune des subdivisions $x_a - x_1, x_b - x_a$, etc., du n° 25.

Ce premier point établi, il est aisé de voir que, réciproquement, toute valeur x_2 , pour laquelle on a $f'(x_2) = F(x_2)$, ne peut coïncider avec aucune des valeurs x_a, x_b , etc., rappelées ci-dessus. En effet, quel que soit le sens suivant lequel la variable x s'écarte de la valeur x_2 , la limite h' a, pour le point de départ, un certain degré de grandeur déterminé, et cette même condition subsiste pour une certaine étendue mesurée, soit en avant, c'est-à-dire de x_2 à x_3 , soit en arrière, c'est-à-dire de x_2 à x_1 . On a donc, d'une part, en vertu de l'équation (1).

$$(5). \quad \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = f'(x_2) + \eta,$$

et d'autre part, en vertu de l'équation (2),

$$(6) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = F(x_1) + \zeta.$$

La combinaison des équations (5) et (6) donne

$$(7) \quad \dots \quad f(x_3) - f(x_1) = (x_3 - x_1) \{ f'(x_1) - \eta \} + (x_3 - x_1) \{ F(x_1) + \zeta \},$$

et à raison de l'égalité des deux valeurs $f'(x_2) = F(x_2)$,

$$(8) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_1) + \frac{(x_3 - x_1) \eta + (x_3 - x_1) \zeta}{x_3 - x_1};$$

ou bien encore

$$(9) \quad \dots \dots \dots \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} = f'(x_1) + \mu \eta,$$

ζ devenant indéfiniment petit, et la fraction μ convergeant vers l'unité à mesure que la valeur x_1 se rapproche indéfiniment de la valeur x_2 .

Les équations (8) ou (9) expriment ce qui suit :

Tandis que la variable x croit continûment de x_1 à x_3 l'accroissement $h = x_3 - x_1$, reste supérieur à la quantité $x_3 - x_2$, et, néanmoins, le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable se rapproche, autant qu'on le veut, de la limite correspondante $f'(x_2) = F(x_2)$.

Pour se convaincre de l'exactitude rigoureuse de cette déduction, il suffit d'observer :

1° Que dans l'équation (9) le degré de convergence a pour mesure le produit $\mu\eta$, μ étant une fraction ;

2° Que la quantité η provient de l'équation (5) où l'on a pu la rendre aussi petite qu'on a voulu, tout en conservant à l'écart $x_3 - x_2$ un certain degré de grandeur.

26. Nous venons de reconnaître que les rapports $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ et $\frac{f(x) - f(x-h)}{h}$, ont constamment même limite pour toute valeur de x comprise dans chacune des subdivisions $x_n - x_1$, $x_k - x_n$, $x_k - x_r$, du n° (25),

et qu'en même temps, aucune des valeurs pour lesquelles cette égalité subsiste ne peut coïncider avec l'une quelconque des valeurs extrêmes x_a, x_b, x_c , etc. Il suit de là que, pour ces dernières valeurs, les deux limites $f'(x)$ et $F(x)$ diffèrent nécessairement, et que, par conséquent, de l'une à l'autre, il y a changement brusque de grandeur. Réciproquement, toutes les fois qu'un pareil changement se produit, pour une valeur déterminée de la variable, l'on peut affirmer que cette valeur appartient à la suite des valeurs isolées x_a, x_b, x_c , etc., précédemment définies.

Soit, en effet, x_2 une valeur de x pour laquelle il y ait inégalité entre les deux quantités $f'(x)$ et $F(x)$, limites respectives des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. L'équation (7) subsistant comme tout à l'heure, à cela près que les quantités $f'(x_2)$ et $F(x_2)$ ont cessé d'être égales; l'on a, en divisant les deux membres par le facteur $x_3 - x_1$,

$$(10). \quad \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} [f'(x_1) + \eta] + \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} [F(x_2) + \zeta].$$

Cela posé, si l'on imagine que la quantité x_1 se rapproche indéfiniment de la valeur x_2 , sans toutefois l'atteindre, il est visible que le second membre de l'équation (10) converge vers la valeur $f'(x_2)$. Or, dans ces mêmes circonstances, la limite du rapport $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$ est $F(x_2)$. On voit donc que si, dans ce cas, l'on se tient à ce procédé, c'est-à-dire si l'on opère en maintenant un certain écart entre les valeurs extrêmes x_1 et x_3 , il devient absolument impossible d'obtenir la convergence voulue. Pour remplir cette condition essentielle, il faut alors faire converger la valeur x_3 vers la valeur x_2 , de manière à rendre la différence $x_3 - x_2$ indéfiniment petite, par rapport à l'accroissement total $x_3 - x_1$, ce qui exige que cet accroissement converge lui-même vers zéro en même temps que x_1 se rapproche indéfiniment de la valeur x_2 . Il est ainsi démontré que

Toute valeur de x , pour laquelle les limites des rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ cessent d'être égales, constitue une des valeurs isolées x_a, x_b, x_c , etc., dont la variable ne peut se rapprocher indéfiniment sans que la limite h converge vers zéro.

On voit aussi par là comment la limite h' , qui reste déterminée et numériquement assignable pour chacune des valeurs extrêmes x_a , x_b , x_c , etc., peut néanmoins converger vers zéro, à mesure que la variable converge vers l'une ou l'autre de ces valeurs, soit en croissant, soit en décroissant. Si ces deux faits peuvent, au premier abord, paraître contradictoires, on reconnaît bientôt que leur existence simultanée est non-seulement possible, mais qu'en outre elle dépend d'une condition particulière aussi simple à concevoir que facile à réaliser.

Ajoutons enfin que des équations (7), (8) et (9) du n° 25, résulte le théorème suivant :

En général, et pour toute valeur de x comprise dans l'une des subdivisions $x_a - x_1$, $x_1 - x_2$, etc., il est indifférent que l'accroissement Δx soit porté tout entier d'un même côté de cette valeur, ou qu'il se compose de deux parties quelconques portées, l'une en deçà, l'autre au delà. Dans tous les cas, la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ reste identiquement la même.

Les détails dans lesquels nous venons d'entrer n'étaient pas absolument nécessaires au but que nous poursuivons. Néanmoins, nous avons cru utile de ne point les omettre dans une étude approfondie, où leur place se trouve marquée naturellement, et où le jour qu'ils jettent sur plusieurs points délicats satisfait l'esprit, en lui permettant de concilier des faits qui lui sont inoposés d'abord, en dépit de leur apparence contradictoire.

Résumé général du chapitre I^{er}.

27. Soit $y = f(x)$ une fonction quelconque, supposée continue dans l'intervalle $x_p - x_a$ où, pour chaque valeur attribuée à x , elle n'affecte jamais qu'une valeur unique, toujours effective, réelle, et déterminée. Soient en outre x et $x + h$ des valeurs choisies comme on voudra entre les valeurs extrêmes x_a et x_p .

Le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable ayant pour expression générale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

il résulte des démonstrations précédentes que nous pouvons considérer comme étant rigoureusement établis les principes suivants :

1° Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne peut jamais être indépendant de l'une des deux quantités x ou h , sans l'être en même temps de l'autre, et sans se réduire, en conséquence, à une constante absolue. En ce cas, la fonction y est linéaire, et réciproquement;

2° Abstraction faite du cas particulier et unique présenté par la fonction linéaire,

$$y = ax + c,$$

pour laquelle, indépendamment de toute valeur attribuée, soit à x , soit à h , l'on a constamment

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax = \text{const.},$$

le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est une fonction continue qui dépend, à la fois et toujours, des deux quantités x et h ;

3° Lorsque la fonction y n'est point linéaire, et que, pour une valeur particulière attribuée à x , l'on fait converger vers zéro l'accroissement h , il peut arriver que le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ croisse sans limite, ou qu'il converge vers une limite constante, ou qu'il oscille sans fin entre plusieurs limites distinctes, ou bien encore qu'il converge vers une limite qui dépend de la valeur attribuée à x , et change avec cette valeur.

De ces quatre conditions, seules possibles dans la variation dont il s'agit, les trois premières ne sont jamais réalisables que d'une manière accidentelle, c'est-à-dire pour des valeurs de x qui demeurent isolées les unes des autres, et qui conservent entre elles certains intervalles. Dans toute l'étendue comprise entre deux quelconques de ces valeurs isolées et successives, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ne cesse point de converger constamment vers une limite déterminée et variable avec x . On a donc en général,

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \eta,$$

η étant une quantité qui dépend de h et qui converge vers zéro en même temps que cet accroissement;

4° Pour chacun des intervalles, dont il vient d'être fait mention, l'on a généralement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = f'(x),$$

et la limite $f'(x)$ est une fonction continue de la variable x . Néanmoins, il est possible que, pour certaines valeurs particulières, x_a, x_b, x_c , etc., comprises dans l'un quelconque de ces intervalles, les limites des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ cessent tout à coup d'être égales. En ce cas, il y a lieu d'observer, comme tout à l'heure, que les valeurs auxquelles répondent ces changements brusques, ne peuvent jamais se succéder qu'en conservant entre elles certains écarts. Il s'ensuit donc que la fonction dérivée $f'(x)$, limite commune des deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ demeure essentiellement continue dans toute l'étendue de chacune des subdivisions successives $x_a - x_1, x_b - x_a, x_c - x_b$, etc.;

5° La continuité de la fonction primitive $f(x)$ implique celle de la fonction dérivée $f'(x)$, pour une suite d'intervalles qui se succèdent sans interruption et qui forment, par leur ensemble, l'étendue totale où s'accomplit la variation de x .

A chaque limite commune à deux de ces intervalles immédiatement successifs, la fonction dérivée peut subir un changement brusque, soit parce que les deux rapports $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$, considérés dans la variation qu'ils subissent pour des valeurs de h indéfiniment décroissantes, cessent de converger vers une même limite, soit que l'un ou l'autre, pris dans les mêmes circonstances, croisse d'une manière indéfinie ou oscille sans fin entre plusieurs limites distinctes. On dit alors qu'il y a solution de continuité. Dans tous les cas, et si rapprochées, si nombreuses qu'elles

puissent être, ces solutions de continuité ne constituent jamais que des accidents transitoires, essentiellement dépourvus du caractère de permanence qui appartient à la variation continue de la fonction primitive et de sa dérivée.

CHAPITRE II.

DÉFINITION ET INTERPRÉTATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

28. Soit une fonction continue de la variable x

$$(1) \quad \dots \dots \dots y = f(x).$$

Si l'on désigne par Δy le changement subi par la fonction lorsque la variable augmente de la quantité Δx , l'on a généralement

$$(2) \quad \dots \dots \dots \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

et en outre, conformément aux déductions précédentes,

$$(3) \quad \dots \dots \dots \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Nous avons démontré que, pour toute valeur de x à laquelle répond une valeur effective de la fonction y , il existe un certain intervalle où l'équation (2) subsiste continûment, et implique, comme conséquence, la condition exprimée par l'équation (3). De là résulte, entre les accroissements Δy et Δx , un lien de dépendance, qui ne cesse pas de les déterminer l'un par l'autre à mesure que tous deux convergent simultanément vers zéro, et qui s'étend ainsi, sans interruption, jusqu'à leur origine elle-même. Par suite, et inversement, il est visible que la génération simultanée de ces accroissements, *considérée à l'instant précis où elle commence, doit, alors même, être nécessairement régie par une loi déterminée.* Plaçons-nous à

cette origine : considérons cet instant précis où les accroissements Δx et Δy prennent en même temps naissance, et, concevant le mode le plus simple qui puisse régir cette génération, ainsi prise à son début, admettons qu'il consiste en une loi de proportionnalité constante et uniforme.

La condition que nous venons d'énoncer se réalise, lorsque la fonction y est linéaire, c'est-à-dire de la forme

$$(4). \quad y = ax + b.$$

En effet, l'on a dans ce cas,

$$(5). \quad \Delta y = a. \Delta x,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(6). \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \text{const.}$$

L'équation (6) met en évidence la loi de proportionnalité, suivant laquelle les grandeurs Δy et Δx s'engendrent l'une par l'autre. Elle montre que cette loi est indépendante de toute valeur attribuée à la variable, et qu'elle reste toujours la même, toujours constante et uniforme, soit que les accroissements s'écartent de leur origine commune en augmentant sans fin, soit au contraire qu'ils s'en rapprochent indéfiniment en convergeant vers zéro. On voit ainsi que le mode, suivant lequel la génération simultanée des accroissements s'accomplit, présente le caractère distinctif d'une invariabilité absolue et, qu'en conséquence, il subsiste à l'origine même de cette génération. Le premier principe à déduire de cette simple analyse peut s'énoncer comme il suit :

Dans toute fonction linéaire

$$y = ax + b,$$

quel que soit le point de départ pris pour origine commune des accroissements Δx et Δy , c'est toujours, suivant la raison de proportionnalité exprimée par a , que commence la génération simultanée de ces deux grandeurs.

Cela posé, si, tenant compte des considérations qui précèdent, l'on compare l'équation (5) à l'équation (6), l'on est conduit naturellement à l'induction suivante :

Dans toute fonction continue et non linéaire

$$y = f(x),$$

la génération simultanée des accroissements Δx et Δy commence, en général, suivant une certaine raison de proportionnalité. Constamment variable avec x , cette raison est exprimée par la valeur particulière que la fonction dérivée $f'(x)$ affecte au point pris pour origine des accroissements.

Ce deuxième principe étant d'une importance tout à fait capitale, nous croyons nécessaire de l'établir directement et avec une entière rigueur. A cet effet, nous procéderons par la voie synthétique.

29. Nous avons dit qu'à l'instant précis où elle commence et quelle qu'en soit d'ailleurs l'origine, la génération simultanée des accroissements Δx , Δy , est nécessairement régie par une loi déterminée. Nous avons ensuite considéré le mode le plus simple que cette loi puisse affecter, et, observant qu'il se résout en une raison de proportionnalité constante et uniforme, nous avons montré comment il se réalise effectivement dans la fonction linéaire

$$y = ax + b.$$

Imaginons, maintenant, qu'au lieu de persister dans une seule détermination, la raison dont il s'agit subisse au contraire une variation incessante, et que, en conséquence, pour chaque valeur affectée par x à l'origine des accroissements, elle soit exprimée par la valeur correspondante d'une certaine fonction continue $\varphi(x)$, choisie comme on voudra.

Il est visible que, dans cette hypothèse, les accroissements Δy et Δx ne peuvent plus, comme tout à l'heure, conserver entre eux le rapport qui régit transitoirement leur génération simultanée prise à son origine. La relation qui les fait dépendre l'un de l'autre est nécessairement plus complexe. Cherchons à la déterminer, car telle est la question que nous avons actuellement à résoudre.

Quelle que soit la valeur attribuée à x , il existe à partir de cette valeur

un certain intervalle Δx , où la fonction $\varphi(x)$ ne cesse pas de croître toujours ou de toujours décroître. Nous admettrons, pour plus de simplicité, que l'intervalle Δx se trouve limité de manière à remplir la première de ces deux conditions. Cette restriction, purement apparente, n'ôte rien à la généralité des démonstrations. On verra aisément qu'elles s'étendent, d'elles-mêmes, à tous les cas possibles.

Divisons l'intervalle considéré Δx en n parties, toutes égales à h , nous aurons

$$nh = \Delta x;$$

et, si nous désignons par $\Delta y_1, \Delta y_2$, etc., Δy_m , etc., Δy_n , les accroissements partiels qui répondent successivement à chacune des subdivisions effectuées, il viendra pour l'accroissement total Δy ,

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 + \text{etc.} + \Delta y_m + \text{etc.} + \Delta y_n.$$

L'intervalle h , auquel répond l'accroissement partiel Δy_m , est limité par les valeurs extrêmes $x + (m-1)h$, $x + mh$. Les valeurs correspondantes de la fonction $\varphi(x)$ sont respectivement $\varphi(x + (m-1)h)$, $\varphi(x + mh)$. Ce sont donc aussi ces dernières valeurs qui déterminent, pour l'intervalle dont il s'agit, les limites entre lesquelles la raison de proportionnalité qui subsiste à l'origine des accroissements, doit être supposée continûment variable et constamment croissante. Or, puisque, dans le cas d'une raison de proportionnalité constante et représentée par a , l'on aurait,

$$\Delta y_m = ah,$$

il s'ensuit que l'hypothèse, où nous raisonnons, implique, comme conséquence *immédiate, nécessaire et évidente*, les deux inégalités générales

$$\Delta y_m > h \cdot \varphi(x + (m-1)h)$$

$$\Delta y_m < h \cdot \varphi(x + mh).$$

De là résulte *à fortiori*

$$\Delta y > h [\varphi(x) + \varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \text{etc.} + \varphi(x+(n-1)h)]$$

$$\Delta y < h [\varphi(x+h) + \varphi(x+2h) + \text{etc.} + \varphi(x+nh)],$$

et, par suite,

$$(7) \quad \Delta y = h [\varphi(x) + \varphi(x+h) + \text{etc.} + \varphi(x + (n-1)h)] + \mu h [\varphi(x+nh) - \varphi(x)],$$

μ étant une quantité comprise entre zéro et 1.

En remplaçant h par sa valeur $\frac{\Delta x}{n}$, l'équation (7) devient

$$(8) \quad \Delta y = \Delta x \left[\frac{\varphi(x) + \varphi(x+h) + \text{etc.} + \varphi(x + (n-1)h)}{n} + \mu \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{n} \right],$$

ou bien encore

$$(9) \quad \frac{\varphi(x) + \varphi(x+h) + \text{etc.} + \varphi(x + (n-1)h)}{n} + \mu \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{n} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Cela posé, imaginons que, sans rien changer à l'intervalle Δx , l'on augmente indéfiniment le nombre n , qui marque en combien de parties égales cet intervalle est subdivisé. L'équation (9) subsistera toujours, et puisque le second membre de cette équation demeure invariable, les deux termes, qui figurent dans le premier, devront former ensemble une somme constante. Or, à mesure que n est pris de plus en plus grand, l'un de ces termes décroît sans fin et approche autant qu'on le veut de zéro; il faut donc que, dans les mêmes circonstances, l'autre converge à lui seul, vers la limite fixe exprimée numériquement par leur somme. Mais, d'un autre côté, ce terme est la moyenne arithmétique des valeurs que la fonction $\varphi(x)$ affecte à l'origine de chacune des subdivisions introduites dans l'intervalle Δx . Il est, d'ailleurs, évident que cette moyenne arithmétique, considérée directement et en elle-même, converge vers une limite déterminée, à mesure que le nombre n croît indéfiniment. Si donc on désigne cette dernière limite par le symbole $\mathbf{M}_x^{\frac{x+\Delta x}{2}} \varphi(x)$, on aura d'abord pour la déterminer rigoureusement

$$(10) \quad \mathbf{M}_x^{\frac{x+\Delta x}{2}} \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \text{etc.} + \varphi\left(x + (n-1)\frac{\Delta x}{n}\right)}{n};$$

et si l'on veut simplement la calculer par approximation,

$$(11). \quad \dots \quad M_x^{x+\Delta x} = \frac{\varphi(x) + \varphi\left(x + \frac{\Delta x}{n}\right) + \dots + \varphi\left(x + (n-1)\frac{\Delta x}{n}\right)}{n},$$

l'erreur commise diminuant à mesure que n augmente, et restant toujours moindre que la quantité

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{n}.$$

Il viendra ensuite, et telle est précisément la relation qu'il s'agissait d'obtenir,

$$(12). \quad \dots \quad \Delta y = \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x}.$$

Cette relation, établie entre les accroissements Δy et Δx , les détermine l'un par l'autre, de manière à réaliser l'hypothèse dans laquelle nous avons raisonné. Ils sont donc tels que leur génération simultanée commence suivant une raison de proportionnalité incessamment variable, et exprimée pour chaque origine par la valeur correspondante de la fonction $\varphi(x)$.

Ainsi que nous l'avons fait voir dans notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante*, et qu'on peut d'ailleurs y parvenir par le procédé suivi tout à l'heure, on démontre aisément qu'en désignant par $f(x)$ une fonction quelconque continue, et par $f'(x)$ la dérivée de cette fonction, l'on a en général ¹

$$(13). \quad \dots \quad \Delta f(x) = \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x}.$$

Il suit de là que, pouvant choisir comme on veut la fonction $\varphi(x)$, il suffit de l'identifier avec la dérivée $f'(x)$ pour que, en vertu des équations (12) et (13), les accroissements $\Delta f(x)$ et Δy qui répondent à un même intervalle quelconque Δx , deviennent eux-mêmes identiques. Cette double identité permet d'appliquer littéralement à l'équation (13) ce que nous avons dit de la relation (12). On voit ainsi que, bien loin d'être gratuite,

¹ Voir, pour la démonstration, le n° 43 ci-après.

l'hypothèse, dans laquelle nous avons raisonné, se réalise au contraire pour toute fonction continue $y = f(x)$, et qu'en conséquence, il est une loi générale de proportionnalité subsistant à l'origine des accroissements Δy , Δx , et régissant leur génération simultanée à l'instant précis où elle commence. Le mode affecté par cette loi est uniforme ou varié, suivant que la fonction y est ou n'est pas linéaire. Dans le premier cas, la raison de proportionnalité, dont la valeur particulière complète la détermination de ce mode, demeure invariable : dans le second, elle change incessamment ; dans l'un comme dans l'autre, elle est exprimée, pour chaque origine, par la valeur correspondante de la dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

30. Le principe que nous venons d'établir peut se démontrer de bien des manières différentes. En voici une, très-prompte et très-directe, qu'il nous suffira d'indiquer.

L'intervalle Δx restant assez petit pour que la fonction $\varphi(x)$ y soit toujours croissante, ou toujours décroissante, il est visible que l'on a, en même temps,

$$\Delta y > \varphi(x) \cdot \Delta x$$

et

$$\Delta y < \varphi(x + \Delta x) \cdot \Delta x;$$

ou bien, au contraire,

$$\Delta y < \varphi(x) \cdot \Delta x$$

et

$$\Delta y > \varphi(x + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

De là résulte, dans tous les cas,

$$(14) \quad \Delta y = \Delta x \cdot [\varphi(x) + \mu \{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)\}],$$

μ étant une quantité comprise entre 0 et 1.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque continue, et $f'(x)$ la dérivée de cette fonction. On a, conformément à l'équation (17) du n° 25,

$$(15) \quad \Delta f(x) = \Delta x \cdot [f'(x) + \eta],$$

η étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx .

Posons, comme tout à l'heure,

$$\varphi(x) = f'(x);$$

la combinaison des équations (14) et (15) donne :

$$\frac{\Delta f(x) - \Delta y}{\Delta x} = \eta - \mu [\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)],$$

et, en vertu du théorème établi n° 16,

$$\Delta f(x) = \Delta y.$$

C. Q. F. D.

51. Nous avons vu comment, pour toute fonction continue $y=f(x)$, le lien de dépendance, qui s'étend jusqu'à l'origine des accroissements Δy et Δx , se résout, à cette origine, en une loi générale de proportionnalité. Nous avons vu, en outre, que la seule distinction établie entre les fonctions linéaires et les fonctions non linéaires, consiste en ce que, pour les unes, il y a invariabilité absolue de la raison suivant laquelle commence la génération simultanée des accroissements, tandis que, pour les autres, cette même raison est incessamment variable. De là résulte la déduction suivante :

Les accroissements $\Delta(ax+b) = a\Delta x$, et $\Delta f(x) = \Delta x \cdot M_{f'(x)}^{x+\Delta x}$, étant rapportés tous deux à une même origine, et tous deux répondant ensemble à une même variation continue de la quantité Δx , c'est suivant un même mode de composition successive que s'accomplit leur génération simultanée. La seule distinction consiste en ce que, pour l'un, l'élément représenté numériquement par a intervient constamment sans changer de grandeur, tandis que, pour l'autre, ce même élément passe par une suite non interrompue de déterminations transitoires, toutes variables avec x dans l'intervalle Δx , et exprimées par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$, c'est-à-dire par le nombre $f'(x+\Delta x)$.

Le mode suivant lequel l'accroissement $\Delta(ax+b) = a\Delta x$, se compose avec les deux grandeurs a et Δx , est assez simple pour qu'on puisse aisément s'en former une image précise. Ce mode, appliqué à la génération continue de l'accroissement $\Delta f(x)$, reste identiquement le même, sauf substitution de la grandeur variable $f'(x+\Delta x)$ à la grandeur constante a .

suffisent pour l'établir), que l'aire engendrée par la portion z dans l'intervalle quelconque Δx , et représentée graphiquement par le quadrilatère mixtiligne $MM'N'N$, a pour mesure le produit $a.\Delta x$. Il suit de là que, pour un même intervalle quelconque Δx , il y a identité entre la génération continue de l'accroissement $\Delta(ax \div b) = a.\Delta x$ et celle de l'aire engendrée par une droite mobile, dont la longueur et la direction demeurent invariables. On peut aussi en inférer que la génération continue de l'accroissement $\Delta f(x)$ ne diffère de la précédente, qu'en ce que la droite mobile change incessamment de grandeur, au lieu de persister dans une seule et même détermination. C'est, au reste, ce que nous allons établir rigoureusement, en examinant le cas où la longueur z est supposée continûment variable.

On a, alors,

$$z = \varphi(x),$$

et l'on peut prendre l'intervalle Δx assez petit pour que la fonction $\varphi(x)$ y demeure toujours croissante, ou toujours décroissante. Admettons que cette condition soit remplie, et que l'on ait, d'ailleurs,

$$MM' = \varphi(x_1).$$

Il est visible que, dans le déplacement de la droite BL , l'extrémité supérieure de la portion z décrit une ligne $M'N''$, située tout entière au-dessus, ou tout entière au-dessous de la courbe $M'N'$. Quant à l'aire engendrée par cette même portion z de la droite BL , et représentée par le quadrilatère mixtiligne $MM'N''N$, on voit clairement qu'elle est nécessairement comprise entre celles qui, pour le même intervalle Δx , répondent aux deux hypothèses

$$z = \text{const} = \varphi(x_1)$$

$$z = \text{const} = \varphi(x_1 + \Delta x).$$

Or, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure, dans la première de ces deux hypothèses, l'aire engendrée aurait pour mesure

$$\Delta x. \varphi(x_1)$$

et dans la seconde

$$\Delta x. \varphi(x_1 + \Delta x).$$

Il est donc clair que, dans le cas où nous raisonnons, elle a pour expression numérique (μ étant une quantité comprise entre 0 et 1),

$$\Delta x [\varphi(x_1) + \mu(\varphi(x_1 + \Delta x) - \varphi(x_1))],$$

ou plus généralement, l'origine x_1 pouvant être changée sans qu'aucune des déductions précédentes cesse d'être applicable,

$$\Delta x [\varphi(x) + \mu(\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x))] = \Delta x [\varphi(x) + \mu \Delta \varphi(x)].$$

Cela posé, si nous désignons par y la fonction inconnue dont l'accroissement Δy , considéré dans sa génération continue, résulte du déplacement de la droite z , constante en direction et variable en grandeur, nous aurons

$$(16). \quad \Delta y = \Delta x [\varphi(x) + \mu \Delta \varphi(x)].$$

Imaginons d'un autre côté que, disposant de la fonction arbitraire $\varphi(x)$, nous la prenons égale à la dérivée $f'(x)$, définie n° 22, et satisfaisant à la condition

$$(17). \quad \Delta f(x) = \Delta x [f'(x) + \eta];$$

soustrayant, membre à membre, les équations (16) et (17) il vient

$$\frac{\Delta f(x) - \Delta y}{\Delta x} = \eta - \mu \Delta \varphi(x).$$

Or, chacune des quantités η et $\mu \Delta \varphi(x)$ décroît indéfiniment à mesure que Δx converge vers zéro. Donc, en vertu du théorème exposé n° 16, l'on a nécessairement,

$$\Delta f(x) = \Delta y.$$

Il est ainsi démontré que, pour tout intervalle Δx où la fonction quelconque $y = f(x)$ demeure continue, la génération successive de l'accroissement $\Delta f(x)$ peut être considérée comme s'identifiant avec celle de l'aire engendrée par une droite mobile, dont la direction demeure constante, et dont la grandeur, incessamment variable, est exprimée, pour chaque point de l'intervalle Δx , par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$.

Cette représentation sensible du mode suivant lequel commence et s'accomplit la génération simultanée des accroissements Δy et Δx , n'est qu'une expression particulière et restreinte de la loi générale de proportionnalité établie ci-dessus. Toutefois elle peut être utile par le jour qu'elle jette sur quelques-unes des déductions qui précèdent et sur celles qui vont suivre.

33. Étant donné une fonction quelconque continue $y = f(x)$, désignons par a la valeur particulière que la dérivée $f'(x)$ affecte à l'origine des accroissements Δy , Δx , et considérons, en même temps, les deux générations simultanées qui répondent, la première, à l'hypothèse dans laquelle, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx , la dérivée $f'(x)$ conserverait la valeur initiale a , la seconde, à la variation continue que cette même dérivée subit en réalité dans l'intervalle dont il s'agit.

Dans ces deux générations simultanées, tout est *transitoirement* identique, à l'instant précis où elles commencent, la génératrice BL affectant alors une position pour laquelle on a, par hypothèse, $z = f'(x_1) = a$. En effet, puisque, en général, ces deux générations ne se distinguent l'une de l'autre que par la substitution de la longueure variable $z = f'(x)$ à la longueure constante $z = a$, il est évident que toute différence s'efface et disparaît, là où ces deux grandeurs sont égales. On voit donc clairement que c'est dans des conditions absolument identiques que commence de part et d'autre la double génération simultanée que nous considérons. On voit aussi, relativement à la seconde génération, prise à son origine, et suivie dans son développement continu :

1° que le seul obstacle apporté à ce qu'elle reste toujours et partout identique à elle-même, réside dans la variation incessante de la grandeur $f'(x)$.

2° Que, si cette génération s'effectuait en subissant, *non plus transitoirement et seulement à l'origine* x_1 , la condition particulière qui détermine en ce point la grandeur variable $z = f'(x)$, mais bien en persistant dans cette même condition *devenue permanente*, elle se confondrait entièrement avec la première, au lieu de se borner à *commencer* comme elle.

34. D'après ce qui précède nous sommes naturellement conduit à considérer d'une manière exclusive la seconde génération, et à distinguer en

elle le développement qu'elle subit en réalité, eu égard à la variabilité de la grandeur $f'(x)$, de celui qu'elle prendrait, à partir d'une origine quelconque x , si cette grandeur persistait dans la détermination qu'elle affecte à cette origine, ou, en d'autres termes, si la génération *continuait uniformément*, suivant le mode *transitoire* qui la régit *alors qu'elle commence*. Lorsqu'il s'agit du développement effectif qui se réalise, dans la génération complexe que nous étudions, l'on désigne par Δy l'accroissement de la fonction correspondant à un accroissement quelconque Δx . S'il s'agit, au contraire, du *développement hypothétique* qui se substituerait au premier, dans la supposition permise où nous raisonnions tout à l'heure, il est visible que l'accroissement de la fonction pris, dans cette hypothèse, pour un même intervalle quelconque Δx , ne peut plus être égal à Δy . On désigne cet accroissement particulier et distinct par le symbole dy , et l'on a, en conséquence,

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

La caractéristique d , introduite dans cette équation, exprime à la fois deux conditions qu'il importe essentiellement de ne jamais perdre de vue. La première consiste en ce que la variable x , engagée dans la fonction $f'(x)$, doit être considérée comme persistant, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx , dans la valeur qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle. La seconde, en ce que cette valeur, *supposée constante*, étant exprimée par x_1 , la quantité dy n'est autre chose que la *différence ordinaire* qui répond à cette hypothèse, c'est-à-dire l'accroissement de la fonction linéaire

$$x \cdot f'(x_1) + b = ax + b.$$

On vient de voir comment l'accroissement dy constitue, par rapport à la fonction $y=f(x)$, un accroissement particulier essentiellement autre que l'accroissement effectif, représenté par Δy . Pour maintenir cette distinction importante, et en rappeler toujours la signification, il est nécessaire d'affecter à l'accroissement dy , considéré par rapport à la fonction non linéaire $y=f(x)$, une dénomination spéciale. Nous adopterons celle d'*accroissement différentiel*, ou, plus simplement encore, nous dirons, ainsi qu'on le fait

habituellement, que l'accroissement dy est la différentielle de cette même fonction, dont la quantité Δy est l'accroissement effectif ou la différence ordinaire.

En résumé, toute fonction continue, non linéaire, $y = f(x)$, fournit comme objets distincts de spéculation deux accroissements nettement définis, en général différents l'un de l'autre, et répondant tous deux à un même accroissement quelconque de la variable. L'un constitue l'accroissement effectif de la fonction : l'autre est la différentielle proprement dite. Au premier, l'on affecte la caractéristique Δ ; au second, la caractéristique d . On a, d'ailleurs, et simultanément, les deux équations suivantes :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot \mathbf{M}_x^{x+\Delta x} f'(x).$$

et

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Dans la première de ces équations, on a égard aux valeurs successives que la dérivée $f'(x)$ affecte, en chacun des points de l'intervalle Δx , et l'on voit comment toutes ces valeurs concourent ensemble à la composition de l'accroissement effectif Δy . Dans la seconde, on suppose au contraire que, pour toute l'étendue de l'intervalle Δx , la dérivée $f'(x)$ conserve une seule et même valeur, celle qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle. La différentielle dy se résout ainsi en une simple différence, déterminée par cette hypothèse, et répondant à la fonction linéaire.

$$x. f'(x_1) + b = ax + b.$$

55. Les démonstrations développées ci-dessus nous permettent de poser, dès à présent, les conclusions suivantes :

1° Dans tout intervalle où la fonction non linéaire $y = f(x)$ demeure continue, et quel que soit le point pris pour origine commune des accroissements Δy , Δx , c'est, en général, suivant une certaine raison de proportionnalité, que commence la génération simultanée de ces accroissements.

2° Cette raison de proportionnalité varie continûment avec x , et elle est exprimée, en chaque point, par la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$.

5° Lorsque l'on considère la raison de proportionnalité, exprimée par $f'(x)$, comme affectant dans l'intervalle Δx toutes les déterminations successives qu'elle comporte, on a la loi variée qui régit le développement continu de la différence ordinaire Δy .

On peut se placer à un point de vue différent et SUPPOSER qu'au lieu de varier dans l'intervalle Δx , la raison dont il s'agit conserve, pour toute l'étendue de cet intervalle, une seule et même détermination, celle qu'elle y affecte à l'origine. En ce cas, on a la loi uniforme qui régit le développement de la différentielle dy .

4° A partir de toute origine commune, il y a identité absolue entre le mode transitoire suivant lequel commence la génération de l'accroissement effectif Δy et le mode permanent suivant lequel s'accomplit la génération de l'accroissement différentiel dy .

56. Les principes que nous venons de formuler ont pour conséquences immédiates deux théorèmes fondamentaux, d'une grande importance, et si simples, d'ailleurs, qu'ils n'exigent aucune démonstration nouvelle.

On conçoit que le mode uniforme affecté par la différentielle, dans son développement continu, admette, suivant les cas, des énoncés divers. Cela posé, l'on a évidemment ce 1^{er} théorème :

Quel que soit l'énoncé fourni comme traduction équivalente de l'équation

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

par cela seul que la condition exprimée a lieu d'une manière permanente et invariable dans la génération de la différentielle, on peut affirmer, sans autre intermédiaire, qu'elle subsiste transitoirement à l'origine de l'accroissement effectif Δy .

Vient ensuite cet autre théorème, qui n'est, au fond, que la réciproque du premier :

Soit y une fonction inconnue de x à déterminer d'après les données suivantes :

- » On sait qu'une grandeur z incessamment variable et exprimée numériquement par $\varphi(x)$, intervient dans la génération continue de l'accroissement Δy .
- » Si, au lieu de varier avec x dans l'intervalle Δx , la grandeur z conservait la valeur quelconque a qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle,

- (toutes choses restant d'ailleurs les mêmes), on sait que dans la génération
- continue, correspondante à cette hypothèse, on aurait en général

$$(1). \dots \dots \dots \Delta y = a. \Delta x.$$

Cela posé, pour tenir compte à la fois de ces deux données, il suffit d'écrire,

$$(2). \dots \dots \dots dy = \varphi(x). \Delta x.$$

De là résulte, pour le cas dont il s'agit en réalité,

$$(3). \dots \dots \dots \Delta y = \Delta x \prod_{x}^{\Delta x} \varphi(x).$$

Il est visible en effet :

1° Que l'équation (3) se déduit immédiatement de l'équation (2);

2° Que l'équation (2) n'est autre chose que l'équation (1), écrite de façon à exprimer par elle seule comment elle a lieu, pour la suite des valeurs affectées par $\varphi(x)$, et dans quelle hypothèse, eu égard à la génération complexe que l'on a particulièrement en vue.

Nous n'insisterons point, pour le moment, sur l'importance des deux théorèmes que nous venons d'énoncer. Disons seulement qu'ils forment la base sur laquelle se fondent les diverses applications de l'analyse transcendante; que seuls ils en donnent la clef et permettent de les aborder toutes, par une voie toujours rationnelle, en même temps que simple et directe au plus haut degré.

37. Nous avons démontré qu'à partir de toute origine quelconque, c'est généralement suivant une certaine raison de proportionnalité que commence la génération simultanée des accroissements Δy , Δx . On peut donc dire que la génération de ces accroissements, pris à leur origine, est habituellement régie par une loi générale de proportionnalité, et comme nous l'avons déjà fait dans notre essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante, on peut désigner plus particulièrement cette loi générale sous le nom abstrait de *loi de génération*.

La loi de génération, telle que nous venons de la définir, est complètement dégagée de toute obscurité métaphysique. Nous croyons donc pouvoir reproduire sans crainte d'aucun malentendu l'énoncé suivant :

« Lorsqu'on fixe l'origine des accroissements, la loi de génération affecte une détermination particulière, et l'on peut d'ailleurs concevoir qu'elle persiste dans cette détermination. En ce cas, certains accroissements résultent du développement continu de cette loi *supposée uniforme*, et pour un même intervalle Δx , ils diffèrent en général des accroissements effectifs exprimés par Δy . De là résultent à la fois la *différentielle* et la *différence*. Toutes deux sont relatives à la fonction y .

« La *différentielle* est l'accroissement pris dans l'hypothèse où la loi de génération conserve une seule et même détermination particulière, celle qu'elle affecte à l'origine de l'intervalle Δx .

« La *différence* est l'accroissement effectif. Elle ne dépend pas seulement de l'expression particulière que la loi de génération affecte à l'origine des accroissements. Elle dépend en outre des modifications continues que cette loi subit dans l'intervalle que l'on considère. »

58. Dans le cas des fonctions linéaires, *la loi de génération est uniforme*. C'est à raison de cette uniformité que, dans son développement continu, elle admet comme traduction explicite et directe, la relation algébrique qui s'établit entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable.

Dans le cas des fonctions non linéaires, *la loi de génération est variée*. Quelle que soit l'étendue de l'intervalle Δx , les déterminations qu'elle y affecte subissent des modifications incessantes, et celles-ci ne cessent point d'intervenir, comme éléments complexes, dans la composition successive de l'accroissement Δy . De là vient que, passant par une suite infinie de déterminations *transitoires*, et ne *persistant jamais* dans aucune, elle se traduit par une équation aux différences où l'on n'aperçoit point, d'abord, une seule de ces déterminations qui se dégage entièrement de toutes les autres et se manifeste isolément. Toutefois, si l'on observe que le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable se compose essentiellement :

1° D'une partie constante qui répond au développement continu d'une loi de génération, *supposée uniforme*, et déterminée par la valeur que la dérivée affecte à l'origine des accroissements;

2° D'une partie variable qui décroît indéfiniment par rapport à la première, à mesure que l'intervalle Δx diminue :

L'on peut en conclure immédiatement,

1° Que cette partie variable ne convergerait pas vers zéro en même temps que Δx , si, à l'origine de cet accroissement, la loi de génération comportait une détermination transitoire autre qu'on l'a supposée tout à l'heure.

2° Qu'en conséquence, telle est effectivement la détermination affectée par cette loi à l'origine des accroissements.

De là résulte évidemment, et avec le sens que nous lui avons assigné n° 54, l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Il serait d'ailleurs facile d'en déduire toutes les conséquences précédemment établies n° 55 et 56.

Sans nous arrêter plus longtemps à développer des principes que nous croyons avoir suffisamment éclaircis, nous laisserons au lecteur le soin de décider si la voie plus longue que nous avons suivie d'abord est ou non préférable à celle que nous venons d'indiquer.

CHAPITRE III.

APERÇU DES RESSOURCES OFFERTES EN ANALYSE ALGÈBRE PAR L'ÉQUATION FONDAMENTALE

$$\lim \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Théorie des dérivées.

59. Étant donné une fonction quelconque, supposée continue, $y = f(x)$, on sait que la dérivée de cette fonction $y' = f'(x)$ se trouve complètement

définie par la relation symbolique

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On sait en outre que de là résulte, comme équation fondamentale équivalente,

$$(1) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x [f'(x) + \eta].$$

la dérivée $f'(x)$ étant une fonction généralement continue^{*}, et η une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx .

Cela posé, nous allons faire voir que les notions les plus élémentaires suffisent :

1° Pour établir directement la règle unique qui comprend, dans sa généralité, toutes les règles particulières de la dérivation ;

2° Pour atteindre ensuite et, d'un seul coup, aux questions les plus élevées de l'analyse algébrique.

Règle unique et générale de la dérivation.

ÉNONCÉ.

40. Soient u et v deux fonctions de la variable x , u' et v' leurs dérivées respectives ; soit $y = f(x)$ une troisième fonction de la même variable, liée aux deux premières par la relation

$$(2) \quad y = F(u, v).$$

Si l'on désigne par $F'_u(u, v)$ la dérivée de la fonction F , prise dans l'hypothèse où l'on considère u comme une simple variable, et v comme une constante, (la même signification, prise en sens inverse, s'attachant à

l'expression $F_v'(u, v)$, l'on a

$$(5) \quad y' = f'(x) = u'F_u'(u, v) + v'F_v'(u, v).$$

DÉMONSTRATION.

L'équation (2) donne identiquement,

$$\Delta y = F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v) + F(u + \Delta u, v) - F(u, v).$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (1),

$$1^\circ \Delta u = \Delta x \cdot [u' + \gamma]$$

$$2^\circ \Delta v = \Delta x \cdot [v' + \delta]$$

$$3^\circ F(u + \Delta u, v + \Delta v) - F(u + \Delta u, v) = \Delta v \cdot [F_v'(u + \Delta u, v) + \epsilon]$$

$$4^\circ F(u + \Delta u, v) - F(u, v) = \Delta u \cdot [F_u'(u, v) + \epsilon']$$

$$5^\circ F_v'(u + \Delta u, v) = F_v'(u, v) + K\Delta u.$$

De là résulte, par voie de simple substitution,

$$\Delta y = \Delta x [(v' + \delta) (F_v'(u, v) + K\Delta u + \epsilon) + (u' + \gamma) (F_u'(u, v) + \epsilon')];$$

et puisque chacune des quantités $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta, \Delta u$, converge vers zéro en même temps que Δx , l'on en conclut immédiatement

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'F_u'(u, v) + v'F_v'(u, v). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Règles particulières impliquées par la règle unique et générale exposée ci-dessus.

41. 1^{re} règle. — La dérivée d'une fonction de fonction s'obtient en prenant la dérivée de la fonction principale, par rapport à la fonction secondaire, considérée comme simple variable, et en multipliant cette dérivée par celle de la fonction secondaire.

Cette règle résulte immédiatement des équations (2) et (5), lorsqu'on y suppose v constant.

2^{me} règle. — La dérivée d'une fonction complexe est la somme des dérivées qu'on obtient en distinguant, dans la fonction, les éléments variables qui la constituent et en opérant tour à tour pour chaque élément distinct, comme s'il restait seul variable tandis que tous les autres sont supposés constants.

Cette règle n'est, eu égard à la précédente, que la traduction littérale de l'équation (3).

3^{me} règle. — La dérivée d'une somme est la somme des dérivées de chaque terme.

4^{me} règle. — La dérivée d'un produit est la somme des résultats qu'on obtient en substituant successivement à chaque facteur sa propre dérivée.

Les règles (3) et (4) ne sont évidemment que des formes particulières de la règle (2).

5^{me} règle. — La dérivée d'une puissance s'obtient en diminuant l'exposant d'une unité et en introduisant comme facteurs, d'une part l'exposant primitif, d'autre part la dérivée de la quantité soumise à l'exposant.

En appliquant la règle (4) à la dérivation de la fonction $y = x^{\frac{p}{q}}$, où p et q sont des nombres entiers, positifs, et où par conséquent l'on peut distinguer p facteurs tous égaux à $x^{\frac{1}{q}} = z$, l'on déduit, sans autre intermédiaire,

$$(4) \quad \dots \dots \dots y' = p x^{\frac{p-1}{q}} \cdot z',$$

Pour déterminer z' supposons p égal à q . En ce cas $y' = 1$: il vient donc,

$$z' = \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

cette valeur, substituée dans l'équation (4), donne, en général,

$$(5) \quad \dots \dots \dots y' = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Soit, maintenant, $u = x^{-\frac{p}{q}}$. Le produit $x^{\frac{p}{q}} \cdot x^{-\frac{p}{q}}$ étant égal à 1, sa dérivée est nulle. On a donc en vertu de la règle (2)

$$u' x^{\frac{p}{q}} + y' x^{-\frac{p}{q}} = 0;$$

et substituant à y' sa valeur tirée de l'équation (5)

$$(6) \quad u' = -\frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Les égalités (5) et (6) prouvent que, quel que soit l'exposant m , entier ou fractionnaire, positif ou négatif, l'on a constamment

$$(7) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = mx^{m-1}.$$

Si, d'ailleurs, on observe que le rapport $\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$ varie continûment avec m , l'on peut en conclure que l'équation (7) ne cesse pas de subsister pour le cas où m est irrationnel. De là résulte, eu égard à la règle (1), la règle (5) énoncée ci-dessus.

Emploi des dérivées dans l'analyse algébrique.

42. A l'aide des règles que nous venons d'établir, l'on peut démontrer en quelques lignes et avec une extrême simplicité :

1° Le binôme de Newton, pour le cas de l'exposant entier et positif ;

2° La formule de Taylor et celle de Maclaurin, présentées toutes deux comme des conséquences immédiates du binôme de Newton.

Nous renvoyons pour ces détails à une note insérée dans le tome XIII des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*. Toutefois, nous montrerons ici comment on peut parvenir d'un seul coup, d'une manière complète et avec une entière rigueur, à l'établissement d'une formule générale qui comprend, comme cas particuliers, toutes celles que nous rappelions tout à l'heure.

Commençons par établir un théorème dont nous avons déjà signalé l'importance et qui nous paraît susceptible d'applications nombreuses. L'usage restreint que nous ferons de ce théorème suffira, pensons-nous, pour montrer qu'il peut servir de fondement à une *théorie générale des moyennes arithmétiques transcendantes*, théorie purement rationnelle, entièrement dégagée de toute obscurité métaphysique, et féconde en ressources nouvelles.

Théorème relatif à la valeur moyenne de la dérivée.

ÉNONCÉ.

45. L'accroissement de la fonction est égal au produit de l'accroissement de la variable par la valeur moyenne de la fonction dérivée.

DÉMONSTRATION.

Reprenons l'équation fondamentale,

$$\Delta y = \Delta x [f'(x) + \eta],$$

et concevons l'intervalle Δx divisé en m parties égales. A chacune des subdivisions, ainsi obtenues, correspond un accroissement de la fonction, et cet accroissement est déterminé par les valeurs particulières que les quantités $f'(x)$ et η affectent à son origine. L'on a ainsi, en posant $h = \frac{\Delta x}{m}$,

[illegible]

Or, la somme des différences $\Delta y_1, \Delta y_2, \text{etc.}, \Delta y_m$ est nécessairement égale à la différence totale Δy . Il vient donc, en ajoutant membre à membre les équations (8),

$$(ii) \quad y = \Delta x \left(\frac{f'(x) + f'(x+h) + f'(x+2h) + \text{etc.} + f'(x+(n-1)h)}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \text{etc.} + x_n}{n} \right).$$

Supposons d'abord que la dérivée demeure continue dans l'intervalle Δx , et imaginons en même temps qu'on attribue à m des valeurs de plus en plus grandes; chacune des quantités η_1, η_2 , etc., devenant ainsi de plus

en plus petite, il est visible que la moyenne arithmétique

$$\frac{f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(m-1)h)}{m}$$

convergera vers une certaine limite déterminée. Nous désignons cette limite sous le nom de *valeur moyenne de la dérivée*, et nous employons pour l'exprimer la notation suivante :

$$M_x^{x+\Delta x} f'(x).$$

De là résulte

$$(10). \quad \frac{f'(x) + f'(x+h) + \text{etc.} + f'(x+(m-1)h)}{m} = M_x^{x+\Delta x} f'(x) + \xi,$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro, à mesure que m croît indéfiniment.

Eu égard à l'équation (10), l'équation (9) devient

$$(11). \quad \Delta y - \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x} f'(x) = \Delta x \left[\xi + \frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_m}{m} \right].$$

Le premier membre de l'équation (11) est la différence de deux termes qui demeurent constants, quel que soit m . Il faut donc que le second membre de cette équation soit lui-même constant ou nul. Or, il ne peut être constant, puisqu'il se compose de deux termes dont chacun devient aussi petit qu'on veut, à mesure qu'on attribue à m des valeurs de plus en plus grandes. Donc il est nul, et l'on a, par conséquent,

$$(12). \quad \Delta y = \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x} f'(x). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Montrons, par un exemple, l'usage qu'on peut faire de l'équation (12). Soit $y = x^{n+1}$ et par suite $y' = (n+1) x^n$. L'équation (12) donne

$$x^{n+1} = x M_x^{x+\Delta x} (n+1) x^n.$$

Il vient donc

$$M_x^{x+\Delta x} x^n = \frac{x^n}{n+1}.$$

On pourrait croire que l'équation (12) est restreinte au cas où la dérivée demeure continue dans l'intervalle Δx : ce serait une erreur. Pour que l'équation (12) subsiste, il faut et il suffit que la fonction soit continue dans l'intervalle que l'on considère. Cette extension de la démonstration que précède se fait très-simplement. L'ayant donnée ailleurs¹, il nous suffit de l'indiquer ici.

Relations générales existant entre les valeurs moyennes des dérivées successives d'une même fonction.

44. Soient $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc., une suite de termes déduits les uns des autres par des dérivations successives, et tous supposés continus entre les limites x et $x + \Delta x = z$.

z étant quelconque, mais constant, considérons la fonction

$$(13) \quad \varphi(x) = (z - x) f'(x).$$

Il est visible qu'elle a pour dérivée,

$$\varphi'(x) = (z - x) f''(x) - f'(x).$$

On a donc, en vertu du théorème qui précède,

$$\varphi(z) - \varphi(x) = (z - x) M_x^2 [(z - x) f''(x) - f'(x)];$$

d'où, substituant à $\varphi(z)$ et à $\varphi(x)$ leurs valeurs déduites de l'équation (13), et réduisant,

$$(14) \quad M_x^2 f'(x) = f'(x) + M_x^2 (z - x) f''(x).$$

La formule (14), lorsqu'on y remplace $f'(x)$ par le produit $(z - x)^{n-1} f^n(x)$, donne d'abord

$$\begin{aligned} M_x^2 (z - x)^{n-1} f^n(x) &= (z - x)^{n-1} f^n(x) \\ + M_x^2 (z - x) [(z - x)^{n-1} f^{n+1}(x) - (n-1)(z - x)^{n-2} f^n(x)]. \end{aligned}$$

¹ Voir notre *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante*.

et, après réduction,

$$(15). \quad M_x^n (z-x)^{n-1} f^n(x) = \frac{1}{n} (z-x)^{n-1} f^n(x) + \frac{1}{n} M_x^n (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

De là résulte, en attribuant à n les valeurs successives, 1, 2, 3, 4, etc., n ,

$$M_x^1 f'(x) = f'(x) + M_x^1 (z-x) f''(x)$$

$$M_x^2 (z-x) f''(x) = \frac{z-x}{2} f''(x) + \frac{1}{2} M_x^2 (z-x)^2 f'''(x),$$

$$M_x^3 (z-x)^2 f'''(x) = \frac{(z-x)^2}{3} f'''(x) + \frac{1}{3} M_x^3 (z-x)^3 f^{(4)}(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

et par conséquent

$$(16). \quad \left\{ \begin{aligned} M_x^z f'(x) &= f'(x) + \frac{z-x}{2} f''(x) + \frac{(z-x)^2}{2.3} f'''(x) + \text{etc.} \\ &+ \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2 \dots n} f^n(x) + \frac{1}{1.2 \dots n} M_x^n (z-x)^n f^{n+1}(x). \end{aligned} \right.$$

§ 4^{bis}. En substituant dans l'équation 12 la valeur de la moyenne $M_x^z f'(x)$ déduite de l'équation (14), l'on trouve

$$\Delta y = \Delta x [f'(x) + M_x^z (z-x) f''(x)].$$

Si l'on compare cette dernière formule à l'équation fondamentale,

$$\Delta y = \Delta x [f'(x) + \eta],$$

on reconnaît que la fonction inconnue, désignée jusqu'ici par η , se trouve complètement déterminée pour tout intervalle où la dérivée $f'(x)$ demeure continue. La relation très-simple et purement algébrique

$$\eta = M_x^z (z-x) f''(x)$$

peut être considérée comme complétant d'une façon très-satisfaisante l'étude analytique que nous avons faite, concernant la composition de la différence ordinaire

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Théorème fondamental relatif au développement des fonctions.

ÉNONCÉ.

45. La fonction quelconque $y = f(x)$ et ses dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$ etc., $f^n(x)$, étant supposées continues entre les limites x et $x + \Delta x = z$, l'on a identiquement :

$$(17). f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} f^n(x) + \frac{z-x}{1.2 \dots n} M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

DÉMONSTRATION.

Nous avons établi ci-dessus que l'on a, d'une part,

$$\Delta y = \Delta x. M_x^z f'(x),$$

et, d'autre part,

$$M_x^z f'(x) = f'(x) + \frac{z-x}{2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2 \dots n} f^n(x) + \frac{1}{1.2 \dots n} M_x^z (z-x)^n f^{n+1}(x).$$

De là résulte, en substituant, et observant que Δx peut être remplacé par $z - x$, Δy par $f(z) - f(x)$,

$$f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \text{etc.} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

46. La formule que nous venons d'établir comprend, comme cas particuliers, les suites de Taylor et de Maclaurin. Comparée à ces suites,

elle offre l'avantage de les reproduire, *sous forme d'identité*, sans jamais laisser rien d'indécis, ni dans l'extension qu'elles comportent, ni dans l'expression du reste qui les complète.

Pour obtenir la série de Taylor, ainsi complétée, il suffit de remplacer z par $x + h$, ce qui donne :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{h^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(x) + \frac{h}{1.2 \dots n} M_x^f (z-x)^n f^{(n+1)}(x).$$

S'il s'agissait de la série de Maclaurin, on ferait $x = 0$, et l'on aurait de même :

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z^2}{1.2} f''(0) + \text{etc.} + \frac{z^n}{1.2 \dots n} f^{(n)}(0) + \frac{z}{1.2 \dots n} M_0^f (z-x)^n f^{(n+1)}(x).$$

REMARQUES PARTICULIÈRES.

47. Lorsque la dérivée de l'ordre $(n+1)$ est constante, les dérivées suivantes sont toutes nulles. On peut alors écrire le dernier terme de l'équation (17), soit en lui conservant sa forme primitive

$$\frac{z-x}{1.2 \dots n} M_x^f (z-x)^n f^{(n+1)}(x),$$

soit en lui attribuant celle qui résulte de la loi de formation des termes antérieurs

$$\frac{(z-x)^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \cdot f^{(n+1)}(x).$$

Égalant ces deux expressions, dont la forme seule peut être différente, observant que, par hypothèse, la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ est indépendante de x , et supprimant les facteurs communs, il vient

$$M_x^f (z-x)^n = \frac{(z-x)^n}{n+1}.$$

Ce résultat n'est autre que celui auquel nous étions déjà parvenus directement n° (45).

48. Nous avons vu que l'équation fondamentale

$$\Delta y = (f'(x) + \eta) \Delta x,$$

a pour expression correspondante

$$\Delta y = \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x},$$

ou bien encore

$$\Delta y = \Delta x [f'(x) + M_x^\theta (x-x) f''(x)].$$

Il est une troisième forme sous laquelle on peut la présenter. Cette forme est la suivante :

$$\Delta y = \Delta x f'(x + \theta \Delta x).$$

Eu égard à cette dernière forme, on peut se proposer de déterminer sinon la valeur de θ , du moins la limite vers laquelle cette valeur converge à mesure que Δx décroît indéfiniment. Une pareille recherche est sans doute plus curieuse qu'utile. Toutefois nous en dirons quelques mots, ne fût-ce que pour signaler à cette occasion un exemple singulier de discontinuité.

Reprenons l'équation (17), et remplaçons, comme tout à l'heure, $z - x$ par Δx , et $f(z) - f(x)$ par Δy . Il vient ainsi,

$$(18). \Delta y = \Delta x f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.} + \frac{\Delta x^n}{1.2 \dots n} f^n(x) + \frac{\Delta x}{1.2 \dots n} M_x^n (x-x)^n f^{n+1}(x);$$

ou a, d'ailleurs,

$$\Delta y = \Delta x M_x^n f'(x).$$

Par hypothèse, la dérivée $f'(x)$ demeure continue dans l'intervalle Δx . Sa valeur moyenne est donc une des valeurs qu'elle affecte dans cet intervalle, et l'on peut écrire

$$M_x^n f'(x) = f'(x + \theta \Delta x),$$

θ étant une fraction. De là résulte, d'abord,

$$\Delta y = \Delta x f'(x + \theta \Delta x),$$

puis développant, suivant la formule (18), la fonction $f'(x + \theta \Delta x)$ et substituant,

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta y &= \Delta x f'(x) + \frac{\theta \Delta x^2}{1} f''(x) + \text{etc.} + \frac{\theta^{n-1} \Delta x^n}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{\theta \Delta x^2}{1.2 \dots (n-1)} M'_x(z' - x)^{n-1} f^{(n+1)}(x). \end{aligned} \right.$$

On observera que l'on a ici $z' = x + \theta \Delta x$.

Imaginons maintenant que, pour une valeur particulière attribuée à la variable x , les dérivées successives s'annulent toutes à la fois, à partir de la seconde ou de la première, jusques et y compris la $n^{\text{ième}}$.

En comparant les identités (18) et (19), il vient alors

$$(20). \quad n \theta \Delta x M'_x(z' - x)^{n-1} f^{(n+1)}(x) = M_x^2(z - x)^n f^{(n+1)}(x).$$

On peut d'ailleurs supposer l'intervalle Δx assez petit pour que la dérivée $f^{(n+1)}(x)$ soit toujours croissante ou toujours décroissante dans cet intervalle. Mais en ce cas, l'on a évidemment, d'une part,

$$M_x^2(z - x)^n f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). M_x^2(z - x)^n + \mu. [f^{(n+1)}(x + \Delta x) - f^{(n+1)}(x)] M_x^2(z - x)^n,$$

et, d'autre part,

$$M_x^{\mu'}(z' - x)^{n-1} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) M_x^{\mu'}(z' - x)^{n-1} + \mu'. [f^{(n+1)}(x + \Delta x) - f^{(n+1)}(x)] M_x^{\mu'}(z' - x)^{n-1},$$

μ et μ' étant des fractions. On peut donc écrire en premier lieu

$$M_x^2(z - x)^n f^{(n+1)}(x) = [f^{(n+1)}(x) + \xi] M_x^2(z - x)^n,$$

et en second lieu

$$M_x^{\mu'}(z' - x)^{n-1} f^{(n+1)}(x) = [f^{(n+1)}(x) + \xi'] M_x^{\mu'}(z' - x)^{n-1},$$

ξ et ξ' étant des quantités qui convergent vers zéro en même temps que Δx .

L'équation (20), lorsqu'on y substitue ces dernières valeurs, devient

$$n \theta \Delta x. [f^{(n+1)}(x) + \xi'] M_x^{\mu'}(z' - x)^{n-1} = [f^{(n+1)}(x) + \xi] M_x^2(z - x)^n.$$

D'un autre côté, l'on a, conformément au résultat établi n° 45 ou n° 47,

$$M_x'(z-x)^n = \frac{\Delta x^n}{n+1}, \quad M_x''(z'-x)^{n-1} = \frac{\delta^{n-1} \Delta x^{n-1}}{n}.$$

Il vient donc, enfin,

$$\theta^n [f^{n+1}(x) + \xi'] = \frac{1}{n+1} [f^{n+1}(x) + \xi].$$

De là résulte, en passant à la limite, pour le cas où la dérivée $f^{n+1}(x)$ n'est point nulle,

$$\lim \theta^n = \frac{1}{n+1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\lim \theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

On voit ainsi que, lorsque la dérivée du second ordre ne s'évanouit pas, si petite que soit d'ailleurs la valeur qu'elle affecte, θ a pour limite constante la fraction $\frac{1}{2}$. Dès que, au contraire, cette dérivée s'annule, la limite de θ change brusquement et elle devient $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, ou plus généralement $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$, n étant l'ordre de la dernière des dérivées qui s'annulent successivement à partir de la seconde ou de la première. Ces permanences et ces changements brusques des diverses limites assignées à θ , suivant le nombre des dérivées successives qui s'évanouissent pour une même valeur attribuée à la variable, présentent un résultat dont la singularité frappe au premier abord. Toutefois, l'on peut s'en rendre compte, en observant que si la dérivée $f^{n+1}(x)$, supposée variable avec x , se réduisait à une constante (les quantités ξ et ξ' s'évanouissant), l'on aurait pour toute l'étendue de l'intervalle Δx

$$\theta^n = \frac{1}{n+1}.$$

DIFFÉRENCES DES ORDRES SUPÉRIEURS ET MOYENNES MULTIPLES.

49. Soit

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

l'on a d'abord, en prenant la différence des deux membres,

$$(21). \quad \Delta^2 y = \Delta [f(x + \Delta x) - f(x)] = \Delta x M_x^2 [f'(x + \Delta x) - f'(x)] = \Delta x M_x^2 \Delta f'(x).$$

Si, d'ailleurs on écrit :

$$(22). \quad \Delta y = \Delta x M_x^1 f'(x),$$

on a de même

$$(23). \quad \Delta^2 y = \Delta x \Delta [M_x^1 f'(x)].$$

La comparaison des équations (21) et (23) donne

$$(24). \quad \Delta [M_x^1 f'(x)] = M_x^2 \Delta f'(x),$$

et de là résulte le théorème suivant :

La différence de la valeur moyenne d'une fonction est égale à la valeur moyenne de la différence de cette même fonction.

L'équation (21), lorsqu'on y remplace $\Delta f'(x)$ par sa valeur $\Delta x M_x^2 f''(x)$, devient

$$\Delta^2 y = \Delta x^2 M_x^1 M_x^1 f''(x),$$

et l'on en déduit, conformément à ce qui précède,

$$\Delta^2 y = \Delta x^2 M_x^1 M_x^1 \Delta f''(x) = \Delta x^3 M_x^2 M_x^2 M_x^1 f'''(x).$$

Convenons de désigner par les notations $\overset{1}{M}$, $\overset{2}{M}$, etc., les *moyennes multiples* $M(M)$; $M[M(M)]$, etc.; il est visible que nous aurons en général

$$(25). \quad \Delta^n y = \Delta x^n \overset{n}{M}_x f^n(x).$$

Cette relation très-simple peut s'énoncer comme il suit :

La différence de l'ordre n d'une fonction est égale au produit de la puissance n de l'accroissement de la variable par la moyenne multiple $\dot{M}$ de la dérivée du même ordre.

Lorsque la dérivée de l'ordre n , $f^n(x)$, est une quantité constante, l'on a évidemment

$$\dot{M} f^n(x) = \dot{M} (f^n(x)) = \dot{M} f^n(x) = f^n(x) = C;$$

et, par suite,

$$(26) \quad \Delta^n y = C \Delta x^n.$$

En général, $f^n(x)$ est une quantité variable. Néanmoins, il est aisé de voir que l'équation (25) est réductible à la forme

$$(27) \quad \Delta^n y = \Delta x^n [f^n(x) + \xi].$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx .

Veut-on déterminer directement la valeur de la quantité

$$\xi = \dot{M} f^n(x) - f^n(x),$$

l'on a, d'abord,

$$\Delta y = \Delta x [f'(x) + M_x^1(z-x) f''(x)].$$

De la résulte, en observant, qu'eu égard à l'équivalence

$$M_x^2(z-x) f''(x) = \lim \frac{1}{m} \left[\Delta x f''(x) + \frac{m-1}{m} \Delta x f'' \left(x + \frac{\Delta x}{m} \right) + \text{etc.} \right. \\ \left. + \frac{\Delta x}{m} f'' \left(x + \frac{m-1}{m} \Delta x \right) \right],$$

le facteur $z-x$ doit être considéré comme constant, dans l'opération indiquée par le symbole $\Delta(z-x) f''(x)$,

$$\Delta^2 y = [\Delta x \Delta f'(x) + M_x^1(z-x) \Delta f''(x)] = \Delta x^2 [f''(x) + M_x^1(z-x) \{f'''(x) + M f'''(x)\}].$$

On trouverait de même,

$$\Delta^3 y = \Delta x^3 [f'''(x) + M_x^2(z-x) \{f''(x) + M_x^1 f''(x) + \dot{M} f''(x)\}],$$

et généralement

$$(28) \quad \Delta^n y = \Delta x^n \left[f^n(x) + M_x^1(z-x) (f^{n+1}(x) + M_x^2 f^{n+2}(x) + M_x^3 f^{n+3}(x) + \text{etc.} + M_x^{n-1} f^{n+1}(x)) \right].$$

L'équation (28), comparée à l'équation (27) donne

$$\xi = M_x^1(z-x) [f^{n+1}(x) + M_x^2 f^{n+2}(x) + M_x^3 f^{n+3}(x) + \text{etc.} + M_x^{n-1} f^{n+1}(x)].$$

On voit ainsi que tout se trouve complètement déterminé dans l'expression générale qui fait dépendre la différence $\Delta^n y$ de la dérivée du même ordre $f^n(x)$.

Dans le cas particulier où la dérivée de l'ordre $(n+1)f^{n+1}(x)$ se résout en une constante, l'on a,

$$\xi = n f^{n+1}(x) M_x^1(z-x) = \frac{n \Delta x}{2} f^{n+1}(x),$$

et par conséquent

$$\Delta^n y = \Delta x^n f^n(x) + \frac{n \Delta x}{2} f^{n+1}(x).$$

Extension générale de la formule

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + f''(x) \frac{\Delta x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

50. Nous venons de montrer comment les différences des ordres supérieurs sont liées aux moyennes multiples. Il existe également des relations très-simples entre ces différences et les moyennes du premier ordre. Nous en dirons quelques mots.

Reprenons l'identité du n° 45, et écrivons-la sous la forme suivante :

$$(29) \quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \text{etc.} + \frac{\Delta x^p}{1.2 \dots p} f^p(x) + \frac{\Delta x}{1.2 \dots p} M_x^{p+1}(z-x)^p f^{p+1}(x).$$

D'après la loi de composition des différences ordinaires, il est facile d'éta-

blir cette autre identité :

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^n y &= f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f[x + (n-1)\Delta x] + \text{etc.} \\ &\pm \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} f[x + (n-m)\Delta x] \mp \text{etc.} \pm f(x). \end{aligned} \right.$$

Cela posé, développons chacun des termes de la différence $\Delta^n y$ d'après la formule (29), et servons-nous de la notation $\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right)$ pour représenter l'expression complexe

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots m} \left(n^m - \frac{n}{1} (n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-2)^m + \text{etc.} \pm n \right);$$

nous trouverons ainsi,

$$(51) \quad \Delta^n y = \left\{ \begin{aligned} &\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ n \end{smallmatrix} \right) \Delta x f'(x) + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ n \end{smallmatrix} \right) \Delta x^2 f''(x) + \text{etc.} + \left(\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix} \right) \Delta x^p f^p(x) \\ &+ \frac{\Delta x}{1 \cdot 2 \dots p} \left(n \mathbf{M}_x^{p+1, n\Delta x} f^{p+1}(x) - \frac{n}{1} (n-1) \mathbf{M}_x^{p+1, (n-1)\Delta x} f^{p+1}(x) + \text{etc.} \right. \\ &\left. \mp \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} (n-m) \mathbf{M}_x^{p+1, (n-m)\Delta x} f^{p+1}(x) \pm \text{etc.} \right). \end{aligned} \right.$$

La quantité z variant d'une moyenne à l'autre et affectant pour chacune la valeur constante exprimée par l'indice supérieur.

Considérons d'abord le cas d'une fonction algébrique rationnelle et entière, soit, par exemple, $y = x^p$. On a alors $f^p(x) = \text{conste} = 1 \cdot 2 \dots p$ et les dérivées suivantes sont toutes nulles. L'équation (51) se réduit en conséquence à

$$(52) \quad \Delta^n y = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ n \end{smallmatrix} \right) \Delta x f'(x) + \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ n \end{smallmatrix} \right) \Delta x^2 f''(x) + \text{etc.} + \left(\begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix} \right) \Delta x^p f^p(x).$$

On a d'ailleurs, conformément au principe établi n° 49,

$$(53) \quad \Delta^p y = \Delta x^p f^p(x),$$

et pour toute valeur de n supérieure à p

$$(54) \quad \Delta^n y = 0.$$

La comparaison des équations (52) et (54) prouve que, pour toute

valeur de p inférieure à n , l'on a nécessairement

$$\left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} = 0.$$

Il suit de là, et eu égard à l'équation (35), que l'hypothèse $p = n$, donne en général

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1.$$

Revenant au cas général, et tenant compte des résultats précédents, il est visible que l'équation (31) peut se simplifier et s'écrire de diverses manières selon qu'on prend p inférieur, égal ou supérieur à n .

Pour plus de facilité représentons par

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{p+1}(x).$$

L'expression sommatoire et limitée

$$\begin{aligned} n M_x^{x+n\Delta x} f^{p+1}(x) - \frac{n}{1} (n-1) M_x^{x+(n-1)\Delta x} f^{p+1}(x) + \text{etc.} \\ \mp \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{p+1}(x) \pm \text{etc.;} \end{aligned}$$

nous aurons ainsi :

dans le premier cas, c'est-à-dire lorsque p reste moindre que n ,

$$(35) \quad \Delta^p y = \frac{\Delta x}{1.2 \dots p} \sum_{m=0}^{m=n-1} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{p+1}(x),$$

dans le second cas, c'est-à-dire lorsque l'on prend p égal à n

$$(36) \quad \Delta^n y = \Delta x^n f^n(x) + \frac{\Delta x}{1.2 \dots n} \sum_{m=0}^{m=n-1} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{n+1}(x).$$

dans le dernier cas, c'est-à-dire lorsqu'on attribue à p une valeur plus grande que n ,

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^p y &= \left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} \Delta x^n f^n(x) + \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ n \end{matrix} \right\} \Delta x^{n+1} f^{n+1}(x) + \text{etc.} + \left\{ \begin{matrix} p \\ n \end{matrix} \right\} \Delta x^n f^n(x) \\ &+ \frac{\Delta x}{1.2 \dots p} \sum_{m=0}^{m=n-1} \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{p+1}(x). \end{aligned} \right.$$

51. Les formules (55), (56) et (57) prises isolément ou combinées soit entre elles, soit avec la formule (28) du n° 49, permettraient d'en établir un grand nombre d'autres. Nous nous bornerons à en indiquer deux.

La formule (55) subsistant pour toute valeur de p inférieure à n , il est visible que, *dans cette hypothèse*, il suffit d'attribuer successivement à p la valeur 0 et une autre valeur quelconque, pour en déduire immédiatement,

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f''(x) \\ = \frac{\Delta x}{1.2 \dots p} \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{p+1}(x).$$

La combinaison des formules (56) et (28) donne de même,

$$1.2.3 \dots n \Delta x^{n-1} \cdot M_x^{x+\Delta x} \left(f^{n+1}(x) + M_x^{x+\Delta x} f^{n+1}(x) + M_x^{x+\Delta x} f^{n+1}(x) + \text{etc.} + M_x^{x+\Delta x} f^{n+1}(x) \right) \\ = \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{1.2 \dots m} (n-m) M_x^{x+(n-m)\Delta x} f^{n+1}(x).$$

Nous ne multiplierons pas ces applications qui ne présentent aucune difficulté. Celles que nous venons de faire suffisent pour mettre en évidence les relations curieuses qui existent, pour les dérivées d'ordres différents, entre les moyennes simples à indices variables, et, pour les dérivées du même ordre entre ces mêmes moyennes et les moyennes multiples à indices fixes.

Vérification de la formule générale

$$\Delta^n y = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ n \end{smallmatrix} \right\} \Delta x f'(x) + \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ n \end{smallmatrix} \right\} \Delta x^2 f''(x) + \text{etc.} + \left\{ \begin{smallmatrix} p \\ n \end{smallmatrix} \right\} \Delta x^p f^p(x) + \text{etc.}$$

52. Terminons ce sujet par une dernière remarque.

On sait qu'en désignant par e la limite de la série convergente,

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{etc.}$$

l'on a, quel que soit x ,

$$(58) \quad \dots f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

et, quel que soit n ,

$$f^n(x) = e^x.$$

Admettons ces diverses relations, faciles à établir sans autre secours que celui de l'équation fondamentale

$$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Si nous posons,

$$y = e^x,$$

Nous aurons d'abord et directement

$$\Delta^n y = e^x (e^{\Delta x} - 1)^n.$$

Il viendra ensuite, conformément à l'équation (31),

$$\Delta^n y = e^x \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \Delta x + \left\{ \frac{2}{n} \right\} \Delta x^2 + \text{etc.} + \left\{ \frac{p}{n} \right\} \Delta x^p + \text{etc.} \right).$$

De là résulte *identiquement*

$$\{e^{\Delta x} - 1\}^n = \left\{ \frac{1}{n} \right\} \Delta x + \left\{ \frac{2}{n} \right\} \Delta x^2 + \text{etc.} + \left\{ \frac{p}{n} \right\} \Delta x^p + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même, Δx étant quelconque,

$$(39). \quad \dots \quad \{e^x - 1\}^n = \left\{ \frac{1}{n} \right\} x + \left\{ \frac{2}{n} \right\} x^2 + \text{etc.} + \left\{ \frac{p}{n} \right\} x^p + \text{etc.}$$

Si, dans le second membre de l'identité (39), l'on prend la dérivée de l'ordre p , et qu'ensuite on attribue à x la valeur zéro, l'on a pour résultat

$$1. 2. 3. \dots p \left\{ \frac{p}{n} \right\}.$$

Il faut donc qu'en opérant de même sur le premier membre, on trouve identiquement cette même valeur.

Or, on a d'abord

$$\left(e^x - 1 \right)^n = e^{nx} - \frac{n}{1} e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)x} \pm \text{etc.} \mp ne^x \pm 1;$$

puis, prenant la dérivée de l'ordre p ,

$$n^p e^{nx} - \frac{n}{1} (n-1)^p e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)^p e^{(n-2)x} \text{etc.} \pm ne^x.$$

Cette dernière expression, lorsqu'on y fait $x = 0$, devient,

$$n^p - \frac{n}{1} (n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)^p - \text{etc.} \pm n.$$

Il est donc vérifié que l'on a généralement pour le coefficient du rang p

$$\{p\} = \frac{1}{1.2 \dots p} \left(n^p - \frac{n}{1} (n-1)^p + \text{etc.} \right)$$

Reprenons l'identité (59). En y remplaçant e^x par le développement (58), elle devient

$$x^n \left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.} \right)^n = \{n\} x + \{n\} x^2 + \{n\} x^3 + \text{etc.}$$

La simple inspection de cette dernière formule montre avec évidence que, pour toute valeur de p inférieure à n , l'on a nécessairement

$$\{p\} = 0.$$

L'identité (59) se réduit, dès lors, à

$$\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.} \right)^n = \{n\} + \{n+1\} x + \{n+2\} x^2 + \text{etc.},$$

et elle prouve que, pour toute valeur de p non inférieure à n , et représentée par $n+q$, l'expression $\{n+q\} = \{n+q\}$ n'est autre chose que le coefficient du terme dans lequel x entre à la puissance $p-n = q$ dans le développement

$$\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.} + \frac{x^q}{1.2 \dots (q+1)} \right)^n.$$

L'on trouve ainsi

$$\{n\} = 1, \{n+1\} = \frac{n}{1.2}, \{n+2\} = \frac{n}{1} \frac{1}{1.2.3} + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\frac{1}{1.2} \right)^2 = \frac{n}{6} + \frac{n(n-1)}{8},$$

ce qui complète la vérification proposée et fournit, en outre, un moyen simple de calculer l'expression $\{n+q\}$, lorsque q est petit et que n est grand.

Ajoutons que l'on a d'ailleurs et généralement

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n+q+p \\ n+q \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} n+p \\ n \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n+p-1 \\ n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} q+1 \\ q \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n+p-2 \\ n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} q+2 \\ q \end{matrix} \right\} + \text{etc.} + \left\{ \begin{matrix} q+p \\ q \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{r=q}^{r=n+q+p} \left\{ \begin{matrix} r \\ q \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n+q+p-r \\ n \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

CHAPITRE IV.

APERÇU DES RESSOURCES OFFERTES EN ANALYSE TRANSCENDANTE PAR L'EXACTE DÉFINITION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

55. Nous avons établi, n° 22, l'équation fondamentale

$$(1) \dots \dots \dots \Delta y = \Delta x [f'(x) + \epsilon].$$

Il résulte de cette équation que l'accroissement de la fonction, supposée continue, $y = f(x)$ se compose, en général, de deux termes essentiellement distincts. L'un de ces termes est égal au produit de l'accroissement de la variable par la fonction dérivée; l'autre est plus complexe, mais il possède la propriété distinctive de décroître indéfiniment *par rapport* au premier à mesure que les accroissements sont supposés de plus en plus petits. En s'arrêtant à cette simple remarque, rien n'empêche de considérer isolément la première partie de la différence et de lui donner le nom de *différentielle*. Si, d'ailleurs, on affecte à la différentielle, ainsi définie, la caractéristique d , il vient immédiatement

$$(2) \dots \dots \dots dy = f'(x) \Delta x^1.$$

¹ Tout ce qui précède s'applique, ainsi que les observations suivantes, aux différentielles d'un ordre quelconque. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que l'équation (1) implique comme conséquence directe et facile à établir par une déduction tout élémentaire, l'équation générale

$$\Delta^n y = [f^n(x) + \epsilon] \Delta x^n,$$

D'après cette définition, la différentielle est une quantité essentiellement finie, susceptible de croître sans limites et de décroître indéfiniment. Rien en elle n'est obscur, ni mystérieux. Identique, comme grandeur, aux grandeurs algébriques, elle se compose avec les mêmes unités et s'introduit dans le calcul sous l'empire des mêmes règles. Dépoignée de tout appareil merveilleux, elle tombe à la fois sous les sens et sous le raisonnement. Elle devient ainsi l'objet d'une conception purement rationnelle et se soutient d'elle-même, sans qu'on soit réduit à faire appel à la foi ou à exiger aucune de ces concessions illogiques qui répugnent à l'intelligence et révoltent le simple bon sens.

Lorsque la fonction y est linéaire, la quantité η s'annule indépendamment de toute valeur attribuée soit à x , soit à Δx . En ce cas, la différentielle et la différence se confondent, sans qu'on puisse établir entre elles aucune distinction. Lorsque la fonction y n'est point linéaire, la quantité η ne peut plus s'annuler que pour certaines valeurs de l'accroissement Δx , qui conservent entre elles des écarts déterminés et qui, par conséquent, ne se présentent jamais que d'une façon tout accidentelle. Convergeant vers zéro avec Δx , elle subsiste aussi longtemps que cet accroissement, et ne permet jamais que, pour aucune étendue, si petite qu'on l'imagine, l'inégalité existant entre la différence et la différentielle s'efface et disparaisse. On doit observer, sans doute, qu'à mesure que l'intervalle Δx diminue, la quantité η varie et décroît indéfiniment, tandis que la dérivée $f'(x)$ conserve une seule et même valeur. Cette remarque est essentielle à faire par les motifs suivants :

1° Elle fixe les caractères précis auxquels on reconnaît, sans pouvoir les confondre, les deux parties essentiellement distinctes qui se composent, avec le facteur Δx , pour former la différence ordinaire Δy .

$f''(x)$ étant la dérivée de l'ordre n et ξ une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx .

Cela posé, l'on distingue aisément dans la différence Δy les deux parties dont elle se compose et qui sont irréductibles entre elles, après la suppression du facteur commun Δx^n . Prenant à part et isolément la première de ces parties, l'on a comme ci-dessus

$$d^n y = f^n(x) \cdot \Delta x^n.$$

2°. Elle permet d'opérer la séparation de ces deux parties, de mettre en évidence celle qui tend à s'évanouir en même temps que Δx , de la supprimer enfin, et *par cette suppression* de dégager la différentielle.

De là résulte avec une extrême simplicité le procédé généralement suivi pour passer de la différence à la différentielle. Il consiste à développer l'expression $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, à dégager le facteur Δx que le développement obtenu contient nécessairement, et à supprimer, dans le second facteur, tous les termes qui s'annulent avec Δx . La suppression dont il s'agit s'effectue, non pas, comme on le dit trop souvent, parce qu'avant de s'évanouir la quantité ε devient infiniment petite et peut, *sans erreur*, être négligée par rapport à la dérivée $f'(x)$; elle a lieu, parce que la propriété de converger vers zéro en même temps que Δx , caractérise, d'une manière complète et exclusive, l'ensemble des termes qu'il faut soustraire du facteur $[f'(x) + \varepsilon]$ pour changer l'expression de la différence en celle de la différentielle. Dès qu'on a reconnu les termes à supprimer, et qu'on les a fait disparaître, il n'y a plus à se préoccuper du moyen dont on s'est servi pour les distinguer de ceux qu'il fallait conserver; l'on a *rigoureusement*

$$dy = f'(x) \Delta x;$$

et bien loin qu'elle doive être restreinte à une suite de valeurs *prétendues infiniment petites*, cette équation s'étend, au contraire, à toutes les valeurs finies de l'accroissement Δx .

54. La différentielle étant définie, comme on vient de le faire, on voit qu'elle est une partie de la différence ordinaire, mais on n'aperçoit point encore ce qu'elle est par elle-même, ni ce qu'elle exprime par rapport à la fonction dont elle dérive. La définition est algébrique; elle satisfait l'esprit et le repose. Elle offre ainsi des avantages précieux; néanmoins tant qu'elle est réduite à la simple traduction d'un fait qu'elle n'explique point et dont le sens échappe, elle se trouve frappée d'une sorte de stérilité relative, et bien qu'elle suffise pour fonder, sur une base rationnelle, la méthode des limites, elle n'y diminue pas sensiblement la difficulté des applications. Veut-on suppléer à cette impuissance qui résulte uniquement d'un défaut d'appropriation? Veut-on réunir aux avantages signalés ci-

dessus, l'avantage important de ces déductions si faciles qui font prévaloir la méthode infinitésimale? Le moyen est extrêmement simple; il se réduit à donner à la définition de la différentielle toute l'extension qu'elle comporte, ou, ce qui revient au même, à saisir, dans l'équation différentielle sa véritable signification. Bornons-nous, sur ce point capital, à rappeler en quelques lignes les principes que nous avons établis précédemment.

Étant donné une fonction quelconque, supposée continue et non linéaire, $y=f(x)$, il existe entre les accroissements simultanés $\Delta y, \Delta x$, un lien de dépendance mutuelle et réciproque. Ce lien s'étend jusqu'à l'origine des accroissements, et il régit leur génération de manière qu'elle commence toujours suivant une certaine raison de proportionnalité. Cette raison de proportionnalité change incessamment, et a pour expression générale la valeur correspondante de la dérivée $f'(x)$. De là vient que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a une limite vers laquelle il converge à mesure que Δx décroît indéfiniment. De là vient aussi que, tout en convergeant vers cette limite, exprimée par $f'(x)$, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ demeure constamment variable et ne peut s'arrêter à aucune valeur dans laquelle il persiste. Imaginer que cette dernière condition cessât d'avoir lieu pour des valeurs de Δx prétendues infiniment petites, ce serait admettre en même temps que la raison de proportionnalité exprimée par $f'(x)$ demeure constamment la même dans toute l'étendue d'un certain intervalle. Une pareille hypothèse est évidemment absurde et contradictoire, lorsqu'il s'agit de l'accroissement effectif Δy . Toutefois elle peut être faite et rester de tout point légitime, pourvu que l'on considère à part l'accroissement particulier qui y correspond. C'est cet accroissement particulier, essentiellement distinct de la différence ordinaire, avec laquelle il ne peut jamais se confondre, qui constitue la différentielle proprement dite, et tel est le sens de l'équation fondamentale

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Dans cette équation la raison de proportionnalité exprimée par $f'(x)$ est supposée constante pour toute l'étendue de l'intervalle quelconque Δx . Eu égard à cette hypothèse, la différentielle dy n'est plus qu'une différence ordi-

naire, et la fonction, dont elle devient ainsi la différence, une fonction linéaire. En d'autres termes, la différentielle est ce que *serait* la différence dont elle dérive, si la raison de proportionnalité qui régit la génération des accroissements *cessait de varier* dans l'intervalle Δx , et y *conservait une seule et même détermination constante*, celle qu'elle affecte *transitoirement* à l'origine de cet intervalle.

Lorsque la définition de la différentielle se trouve ainsi complétée, elle offre toutes les ressources possibles. La méthode qu'elle sert à fonder se distingue alors, non plus seulement parce qu'elle est purement algébrique, mais parce qu'en outre elle égale et dépasse même la méthode infinitésimale, sous le double rapport de la facilité des applications et de la fécondité. Pour justifier cette assertion, qui paraîtra sans doute exagérée, nous prendrons quelques exemples, et nous les traiterons à l'aide des théorèmes que nous avons exposés n° 36, comme conséquences immédiates de la définition de la différentielle. Si ces exemples ne suffisaient pas pour mettre en évidence la supériorité de notre méthode, nous renverrions le lecteur à notre essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante; là, les applications sont nombreuses, et nous croyons qu'elles seront facilement saisies, maintenant que nous les avons dégagées de toute obscurité, en rendant sensibles les principes abstraits qui leur servaient de fondement.

Nature intime de la ligne courbe reconnue a priori et démontrée directement par l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

33. Reprenons le 1^{er} théorème du n° 36 :

Quel que soit l'énoncé fourni comme traduction équivalente de l'équation

$$dy = f'(x) \Delta x,$$

par cela seul que la condition exprimée à lieu d'une manière PERMANENTE ET INVARIABLE dans la génération de la différentielle, on peut affirmer, SANS AUTRE INTERMÉDIAIRE, qu'elle subsiste TRANSITOIREMENT à l'origine de l'accroissement effectif Δy .

Cela posé imaginons que l'équation

$$y = f(x),$$

représente une courbe plane rapportée à des axes quelconques. Si nous prenons l'équation différentielle

$$(5) \dots \dots \dots dy = f'(x) \Delta x,$$

nous devons y considérer la dérivée $f'(x)$ comme une *constante* déterminée par la valeur particulière affectée par x à l'origine de l'intervalle Δx . Dans *cette hypothèse*, dy n'est plus qu'une différence ordinaire : c'est donc une droite qui se trouve représentée par l'équation (5), et l'inclinaison de cette droite par rapport aux axes est fixée par la valeur particulière de la dérivée $f'(x)$. Or, dans la génération de la droite, le déplacement du point générateur s'effectue toujours suivant une seule et même direction. Voilà donc une condition *permanente et invariable* exprimée par l'équation différentielle, et complètement déterminée par la valeur particulière que la variable x affecte à l'origine des accroissements. On peut et l'on doit en conclure que cette même condition, ainsi particularisée, subsiste *transitoirement* à l'origine de l'accroissement effectif Δy . De là résultent, comme conséquences immédiates et rigoureuses, les deux énoncés suivants :

1° Dans la génération d'une courbe quelconque $y = f(x)$, c'est toujours suivant une certaine direction, déterminée pour chaque position et incessamment variable d'une position à l'autre, que s'effectue le déplacement du point générateur.

2° La droite qui fixe cette direction et que l'on nomme *tangente*, a pour équation aux différences ordinaires l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

On voit ainsi qu'en chaque point d'une courbe, il est une direction première suivant laquelle la continuité s'établit. La *tangente* ne fait que manifester cette direction en la rendant sensible. Sur la courbe, la direction change incessamment, et nul espace n'est franchi, sans qu'elle se soit modifiée. Le contraire a lieu pour la tangente où la direction *persiste* dans la détermination que la courbe affecte *transitoirement* au point que l'on considère.

Dans la méthode des limites, comme dans celle des fonctions dérivées, la définition de la tangente est exacte, mais imparfaite et insuffisante. Elle n'apprend rien sur ce qu'il importe le plus de connaître, le lien intime existant entre la tangente et la courbe. Dans la méthode infinitésimale ce lien est nettement accusé, mais avec une exagération absurde et dangereuse. On ne s'y contente pas d'attribuer à la direction tangentielle la détermination *essentiellement transitoire* qu'elle affecte en chaque point : on admet, contre toute logique, que cette détermination demeure persistante, pour une certaine étendue, et l'on s'imagine corriger une aussi grave erreur, en affirmant de l'étendue dont il s'agit qu'elle est infiniment petite, c'est-à-dire que, sans être nulle, elle s'évanouit néanmoins devant toute longueur finie. Dans cette méthode, où l'on ne craint pas d'accumuler les absurdités et les contradictions, la circonférence de cercle est considérée comme s'identifiant avec un polygone rectiligne où se succèdent une infinité d'angles et de côtés. Cependant elle ne cesse pas d'avoir tous ses points équidistants d'un point intérieur, ni par conséquent d'être la ligne engendrée par l'extrémité du rayon tournant autour du centre. Où sont les côtés de ce polygone ? Où sont les sommets de ses angles ? Comment le rayon tournant autour du centre peut-il engendrer une succession *discontinue* d'éléments rectilignes ? Comment est-il possible qu'un mode de génération *essentiellement uniforme*, toujours et partout identique à lui-même, produise tantôt une *suite continue de points* n'admettant tous qu'une seule et même tangente, tantôt des *points isolés* auxquels deux tangentes correspondent ? On ne saurait ni le voir, ni le comprendre. Ce que l'on ne voit pas est donné comme échappant à la grossièreté de nos sens, qui ne nous permettent pas de pénétrer dans la région des infiniment petits : ce que l'on ne comprend pas est tout simplement affirmé ; c'est un mystère qu'il n'est pas besoin d'éclaircir ; c'est une révélation qu'il faut admettre et respecter.

Laissant de côté l'absurde conception du *cercle polygone*, je dois néanmoins insister sur la définition de la tangente. J'ai pu me convaincre que l'usage de la méthode infinitésimale, alors même qu'on sait en éviter les abus, suffit pour obscurcir la notion de continuité et la rendre en quelque sorte inintelligible. De là vient sans doute que j'ai rencontré, chez des

géomètres, partisans modérés des infiniment petits, une difficulté presque insurmontable à concevoir nettement que, dans le mouvement d'un point qui décrit une courbe, il y a à chaque instant direction déterminée, cette direction n'étant jamais persistante et produisant la courbure par les modifications continues qu'elle subit incessamment. Toutefois il est plusieurs moyens de démonstration qui m'ont souvent réussi comme élucidation du sens exprimé par l'équation différentielle. Je vais essayer d'en reproduire ici quelques-uns. Directs ou indirects, ils tendent également au but proposé; s'ils l'atteignent, le lecteur n'hésitera pas sans doute à les admettre.

56. Imaginons qu'un point m se meuve en se dirigeant toujours vers un autre point n . Quelles que soient les deux positions affectées simultanément par ces points, elles déterminent une droite qui peut, suivant les cas, être fixe ou mobile et que nous désignerons par ses extrémités m , n . Supposons, d'abord, que le point directeur soit arrêté dans la position qu'il occupe à un instant quelconque. Il est visible, qu'à partir de ce même instant, le point m décrit une portion de la droite mn devenue fixe. Supposons, ensuite, que le point n entre en mouvement et se déplace suivant une ligne quelconque, toujours autre que la droite mn . A partir de l'instant précis où ce mouvement commence, la ligne décrite par le point m ne peut plus être droite sur aucune étendue. Elle est donc courbe. Toutefois rien n'est changé pour le point m dans la direction qu'il affecte à l'origine de l'arc curviligne; il arrive seulement, qu'au lieu d'être *persistante*, comme dans le premier cas, cette direction n'est plus que *transitoire*. Il en est de même pour toute autre direction suivie par le point m dans le parcours de la courbe. Veut-on rendre sensible l'une quelconque de ces directions? Il suffit d'arrêter le point n dans la position correspondante, où il est parvenu. De *transitoire* qu'elle était, la direction dont il s'agit devient alors *permanente*, et l'on voit clairement que, ne cessant jamais de coïncider avec celle de la droite mn , pour toute l'étendue de l'arc curviligne, elle est, comme celle-ci, déterminée pour chaque point de cet arc, et constamment variable d'un point à un autre.

L'exemple que je viens de développer me paraît à lui seul assez dé-

monstratif. Néanmoins j'en ajouterai un second, emprunté à la dynamique, et plus propre encore que le premier à forcer les convictions rebelles.

Soit un point matériel décrivant une courbe, sous l'action d'une force infléchissante. Si, à un instant quelconque, l'action de la force infléchissante vient à cesser, l'on sait qu'à ce même instant le point s'échappe suivant la tangente à la courbe qu'il décrit. Il est d'ailleurs établi en principe qu'un point matériel, supposé libre et soustrait à toute action extérieure, est impuissant à modifier par lui-même son état de mouvement, de telle sorte qu'il ne fait jamais que persister dans cet état, que caractérisent une certaine vitesse et une certaine direction, déterminées toutes deux et toutes deux invariables.

Il suit de là que si le point matériel, dont nous parlions tout à l'heure, s'échappe suivant la tangente à la courbe qu'il décrit, c'est en persistant dans l'état de mouvement qui l'anime à l'instant que l'on considère. Cet état, qu'il ne peut changer par lui-même, n'aurait subsisté que *transitoirement*, sous l'action continue de la force infléchissante. Cette action cessant par hypothèse, l'état dont il s'agit devient *permanent*, et puisque le mouvement a lieu en ligne droite, on voit avec évidence qu'il *révèle comme direction préexistante* cette même direction suivant laquelle le déplacement s'accomplit.

57. Nous venons de voir qu'à partir d'un point quelconque pris sur une courbe, la continuité s'établit suivant une direction déterminée. Lorsque cette direction *persiste* et devient *permanente*, la ligne engendrée est droite. En général la direction dont il s'agit n'est que *transitoire* et elle varie avec continuité. De là naît la courbure; elle résulte des modifications continues que la direction tangentielle subit incessamment.

Soit ω l'angle qu'une tangente quelconque à la courbe $y = f(x)$, fait avec l'axe des abscisses, on a généralement, les axes étant rectangulaires,

$$\omega = \text{arc tang. } f'(x).$$

De là résulte, d'abord,

$$dx = \frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2} \Delta x;$$

si d'ailleurs on désigne par Δs la longueur de l'arc qui répond à l'intervalle Δx , l'on a pour l'accroissement différentiel ds mesuré sur la tangente

$$ds = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}.$$

Il vient donc en substituant

$$d\omega = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} ds.$$

L'équation différentielle que nous venons d'écrire s'applique à la génération simultanée des accroissements angulaires et arcuels. Elle détermine :

- 1° Le rapport suivant lequel *commence* cette génération;
- 2° La ligne qui se substitue à la courbe donnée, lorsqu'on suppose que ce rapport persiste dans la détermination *transitoire* qu'il affecte à l'origine des accroissements.

Considérant cette ligne, et substituant les différences aux différentielles, il vient

$$\frac{\Delta \omega}{\Delta s} = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \text{const.}$$

En ce cas, deux arcs quelconques, égaux en longueur, sont toujours superposables. La courbure est donc uniforme, et la ligne engendrée une circonférence de cercle ayant pour rayon

$$\rho = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}.$$

Le cercle, ainsi déterminé, a en tous ses points même courbure que la courbe donnée au point que l'on considère. On le nomme *cercle osculateur*, et son rayon *rayon de courbure*. En général la courbure varie d'un point à un autre. Dans tous les cas elle est mesurée par le rapport $\frac{1}{\rho}$ et le changement de direction pris à son *origine*, *commence* sur la courbe de la même manière qu'il s'effectue constamment sur toute l'étendue du cercle osculateur.

*Conditions intimes du mouvement d'un point matériel rendues sensibles
et démontrées directement par la différentiation.*

58. Un point matériel se meut dans l'espace. Une relation existe entre le temps t et le chemin parcouru e . On suppose cette relation connue et exprimée par l'équation

$$e = f(t).$$

De là résulte immédiatement

$$de = f'(t) \, \Delta t,$$

c'est-à-dire l'équation d'un mouvement uniforme où la vitesse se conserve sans altération, et demeure constamment exprimée par la valeur particulière que la dérivée $f'(t)$ affecte à l'origine des accroissements $\Delta e, \Delta t$. Concluons, en vertu du théorème rappelé ci-dessus n° 55, que, si l'on désigne en général par v la vitesse acquise après le temps t dans le mouvement auquel s'applique l'équation

$$e = f(t),$$

l'on a, en général,

$$v = f'(t).$$

Différentiant cette dernière équation, il vient

$$dv = f''(t) \, \Delta t,$$

c'est-à-dire l'équation d'un mouvement uniformément varié, où l'action motrice demeure toujours la même et a pour expression constante, rapportée à l'unité de masse, la valeur que la dérivée $f''(t)$ affecte à l'origine des accroissements $\Delta v, \Delta t$.

Concluons comme tout à l'heure que, dans le mouvement dont il s'agit en réalité, si l'on désigne par F , pour l'unité de masse, la valeur que l'action motrice affecte à l'instant t , l'on a généralement

$$F = f''(t).$$

59. Les applications qui précèdent montrent suffisamment le rôle assigné à la différentiation, lorsqu'il s'agit de pénétrer au fond des choses et d'en

découvrir la nature intime. Pour atteindre ce résultat important, il n'est pas besoin de recourir à l'hypothèse dangereuse d'une discontinuité impossible ou contradictoire; tout se réduit à saisir la véritable signification de l'équation différentielle. Cette notion éminemment simple, fournit d'ailleurs d'autres ressources également précieuses et plus fécondes encore, à raison de l'extension qu'elles comportent. Pour en donner une idée, nous indiquerons par quelques exemples comment s'applique le second théorème exposé n° 35, et énoncé dans les termes suivants :

Soit y une fonction inconnue de x qu'il s'agit de déterminer d'après les données suivantes :

- « On sait qu'une grandeur z incessamment variable et exprimée numériquement
- » par $\varphi(x)$ intervient dans la génération continue de l'accroissement Δy .
- » Si, au lieu de varier avec x dans l'intervalle Δx la grandeur z conservait la
- » valeur quelconque a qu'elle affecte à l'origine de cet intervalle (toutes choses
- » restant d'ailleurs les mêmes), on sait que dans la génération continue, corres-
- » pondante à cette hypothèse, on aurait en général

$$\Delta y = a \Delta x;$$

- » cela posé, pour tenir compte à la fois de ces deux conditions, il suffit d'écrire

$$dy = \varphi(x) \Delta x.$$

- » De là résulte pour le cas dont il s'agit en réalité

$$\Delta y = \Delta x \int_x^{x+\Delta x} \varphi(x).$$

PREMIER EXEMPLE.

Mesure du volume engendré par le mouvement d'une aire plane qui se transporte parallèlement à elle-même en changeant de grandeur.

Soit V le volume engendré par une aire plane ω , qui se transporte parallèlement à elle-même, en changeant de grandeur. Imaginons qu'à partir d'une position quelconque, et toutes choses restant d'ailleurs les mêmes, l'aire ω persiste dans la détermination qu'elle affecte. Il suffit de

prendre l'axe des x perpendiculaire au plan de l'aire ω pour que, dans l'hypothèse où nous venons de nous placer, l'on ait généralement

$$\Delta V = \omega \Delta x.$$

De là résulte, pour le cas dont il s'agit en réalité,

$$dV = \omega dx,$$

et, par conséquent,

$$\Delta V = \Delta x \cdot M_x^{x+\Delta x} \omega.$$

DEUXIÈME EXEMPLE.

Mesure de l'espace décrit par un point mobile animé d'une vitesse variable.

Soit un point mobile animé d'une vitesse v incessamment variable avec le temps t . Si, à partir d'un instant quelconque, on suppose que la vitesse v persiste dans la détermination particulière qu'elle affecte à ce même instant, et qu'on désigne par e l'espace déjà parcouru, l'on a généralement pour l'accroissement Δe qui répond à cette hypothèse

$$\Delta e = v \Delta t;$$

de là résulte, pour le cas dont il s'agit en réalité,

$$de = v dt,$$

et, par conséquent,

$$\Delta e = \Delta t \cdot M_t^{t+\Delta t} (v).$$

60. La méthode dont nous venons de donner une idée, par deux exemples très-simples, s'applique avec la même facilité aux cas les plus complexes. Notre essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante fournit, à cet égard, tous les développements nécessaires. Ne pouvant les reproduire ici, nous nous bornerons à dire en quelques mots quel est le véritable rôle assigné au calcul différentiel dans toutes les applications de ce genre.

Concevons que l'on se propose l'étude d'un phénomène quelconque, et qu'il s'agisse de traduire algébriquement les lois qui en régissent le développement continu. C'est uniquement par la mesure des effets produits, que le calcul peut intervenir. En général, certaines grandeurs, connues *a priori*, concourent à la génération des effets qu'il s'agit de calculer, et c'est parce que ces grandeurs varient, c'est parce que leurs expressions numériques changent incessamment que le problème à résoudre est rendu difficile. Ce point admis, la question se trouverait singulièrement simplifiée, s'il suffisait de la traiter directement, pour le cas où, *toutes choses restant d'ailleurs les mêmes*, les grandeurs dont il s'agit cesseraient de varier numériquement, et conserveraient une valeur quelconque toujours constante. Le problème est-il convenablement résolu dans cette hypothèse, et veut-on restituer aux quantités supposées quelconques, mais constantes, leur caractère de variabilité continue, il suffit de substituer aux différences ordinaires les différentielles qui leur correspondent. Cela fait, et *par cela seul*, on obtient la solution cherchée pour le cas général.

On voit ainsi d'où vient la puissance de l'analyse différentielle. Elle résulte essentiellement de ce que, dans certaines classes de problèmes, les équations aux différences ordinaires, établies pour les cas les plus simples, ne sont pas plutôt transformées en équations différentielles, par un simple changement de caractéristique, qu'elles deviennent immédiatement applicables aux cas plus compliqués que l'on a principalement en vue, et que l'on ne saurait aborder directement par aucune autre méthode. Cette extension si remarquable des moyens bornés, dont l'analyse ordinaire dispose, se distingue peut-être moins encore par sa puissance que par sa simplicité.

Lorsqu'on a reconnu que, là où certaines grandeurs *continûment variables* concourent à la production d'un phénomène, l'équation différentielle n'intervient que comme expression directe et purement algébrique des effets qui répondent à une détermination quelconque de ces grandeurs *supposées constantes*, on conçoit aisément pourquoi cette équation s'établit avec tant de facilité, pourquoi aussi, la question ne cessant pas d'être en

réalité complexe, les difficultés qui lui sont inhérentes se trouvent transportées dans l'intégration.

61. Au lieu d'appliquer littéralement les deux théorèmes du n° 56, l'on peut, dans un grand nombre de cas, procéder plus simplement encore, en se fondant sur certaines déductions de ces théorèmes ou des principes sur lesquels ils reposent. De là, de nouveaux avantages, dont il convient que nous fassions ressortir l'importance par quelques applications particulières. Disons d'abord un mot de la forme sous laquelle peut s'écrire l'équation fondamentale

$$(1). \dots\dots\dots dy = f'(x) \Delta x,$$

lorsque la variable x dépend ou est supposée dépendante d'une autre variable.

Si l'on désigne par t cette nouvelle variable et par $x = F(t)$ la relation qui existe en réalité, ou qu'on établit arbitrairement, entre x et t , l'on a

$$(2). \dots\dots\dots dx = F'(t) \Delta t.$$

Dans l'équation (1) l'on dispose de la quantité Δx et l'on peut la déterminer comme on veut. Il en est de même de la quantité Δt dans l'équation (2). Il est donc évident que rien n'empêche que, dans l'équation (1), l'on attribue à Δx la valeur dx fournie par l'équation (2). Il vient alors

$$(3). \dots\dots\dots dy = f'(x) . dx.$$

Présentée sous cette forme, l'équation (1) conserve le sens que nous lui avons attribué précédemment. Elle ne cesse pas de fixer par la valeur du quotient $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ la raison suivant laquelle commence la génération simultanée des accroissements Δy , Δx . Toutefois, elle a l'avantage d'être plus symétrique, de mettre mieux en évidence la réciprocité du lien de dépendance existant entre les variables x et y , enfin de pouvoir se combiner directement avec l'équation (2), de fournir ainsi la relation

$$dy = f'(x) F'(t) \Delta t,$$

et par conséquent de donner immédiatement la raison $f'(x) F'(t)$, suivant

laquelle commence la génération simultanée des accroissements Δy et Δt .

Lorsqu'il existe entre n variables ($n - 1$) relations, chaque variable peut être considérée comme fonction de l'une quelconque des autres. Dans chacun des couples qu'on peut ainsi former, la variable, prise pour fonction, a une différentielle particulière. Si ces différentielles sont toutes prises par rapport à une seule et même variable, dont on puisse disposer librement, celle-ci est dite variable indépendante, et chaque différentielle se trouve déterminée. Le choix de la variable indépendante est tout à fait arbitraire. Néanmoins, et pour plus de généralité, il convient souvent d'introduire, par la pensée, une variable que l'on n'exprime point, et de la prendre pour variable indépendante, en la supposant liée, par telle relation qu'on voudra, à l'une quelconque des variables sur lesquelles on opère explicitement. Dans ce système, les calculs offrent plus de symétrie, et ils se prêtent, en outre, à toute détermination ultérieure de la variable indépendante.

Lorsque les relations existant entre n variables sont en nombre inférieur à $(n - 1)$, le procédé que nous venons d'indiquer n'est plus, en général, un simple artifice auquel on est ou non libre de recourir. Ce procédé, qui consiste à introduire, par la pensée, une variable que l'on n'exprime point, et dont on fait dépendre toutes les autres par un nombre convenable de relations arbitraires, est impérieusement prescrit toutes les fois que le nombre des variables l'emporte de plus d'une unité sur celui des équations. Ainsi que nous l'avons dit et démontré ailleurs ¹, il est le seul qui puisse, en ce cas, donner un sens précis aux différentiations successives.

62. Cela posé, soient x, y, z , les coordonnées rectangulaires d'un point pris sur la courbe

$$x = f(z)$$

$$y = F(z).$$

Soit d'ailleurs σ la longueur d'un arc mesuré sur cette courbe et terminé au point (x, y, z) .

¹ Voir notre essai déjà cité.

Considérer les différentielles dx , dy , dz , $d\sigma$, c'est à partir du point (x, y, z) , substituer à la courbe sa tangente en ce point. C'est par rapport à cette tangente, exprimer par ces différentielles, les différences ordinaires correspondantes. Il suit de là que, si l'on désigne par α , β , γ , les angles que la tangente, dont il s'agit, fait respectivement avec les axes coordonnés des x , des y et des z , l'on a directement et sans aucun intermédiaire

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \\ \cos \alpha &= \frac{dx}{d\sigma} \\ \cos \beta &= \frac{dy}{d\sigma} \\ \cos \gamma &= \frac{dz}{d\sigma} \end{aligned}$$

De là résulte encore

$$d\sigma = dz \sqrt{1 + f'(z)^2 + F'(z)^2};$$

puis prenant z pour variable indépendante,

$$\Delta\sigma = \Delta z \sqrt{1 + f'(z)^2 + F'(z)^2}.$$

Soient maintenant t , u , v , les coordonnées d'un point quelconque pris dans le plan mené par le point (x, y, z) , normalement à la courbe. Si l'on considère ce point comme le centre d'un cercle touchant la courbe au point (x, y, z) , et qu'on désigne par R le rayon de ce cercle, on a d'abord

$$(t-x)^2 + (u-y)^2 + (v-z)^2 = R^2;$$

puis différentiant par rapport aux variables y , x , z considérées comme appartenant au cercle dont il s'agit :

$$(1-x) dx + (u-y) dy + (v-z) dz = 0.$$

Cette relation subsiste évidemment pour un point quelconque du plan normal. Elle est donc l'équation de ce plan. D'un autre côté, le cercle a même tangente que la courbe au point considéré (x, y, z) . On peut donc,

comme tout à l'heure, remplacer par $f'(z)$ et $F'(z)$ les rapports $\frac{dx}{dz}$, et $\frac{dy}{dz}$, et, par conséquent, écrire l'équation du plan normal sous la forme suivante,

$$(t-x)f'(z) + (u-y)F'(z) + v-z = 0.$$

63. Soit une surface

$$u = F(x, y, z) = 0,$$

et sur cette surface un point quelconque (x_0, y_0, z_0) . Il est un lieu géométrique déterminé par l'ensemble infini des directions suivant lesquelles la continuité s'établit sur la surface à partir de ce point. Quel que soit ce lieu, il reste le même lorsque, supposant permanentes les raisons de proportionnalité suivant lesquelles commence pour une section quelconque la génération simultanée des accroissements $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, on substitue à la surface donnée celle qui a pour équation

$$\frac{du_0}{\Delta x_0} dx + \frac{du_0}{\Delta y_0} dy + \frac{du_0}{\Delta z_0} dz = 0,$$

c'est-à-dire,

$$(x-x_0) \frac{du_0}{\Delta x_0} + (y-y_0) \frac{du_0}{\Delta y_0} + (z-z_0) \frac{du_0}{\Delta z_0} = 0.$$

Or, cette équation appartient à un plan. Elle exprime donc le lieu géométrique lui-même. On le nomme plan tangent.

Considérons tant de courbes qu'on voudra tracées sur la surface et passant par le point de contact du plan tangent. A partir de ce point la continuité s'établit, pour chaque courbe, suivant la direction fournie par la tangente. Lieu géométrique de ces directions, le plan tangent contient toutes les tangentes.

64. Lorsque deux courbes ont en un point commun (x, y, z) même tangente, les quantités dx, dy, dz sont identiques de part et d'autre, et il en est de même de l'accroissement différentiel

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Suppose-t-on, en outre, qu'en ce point, les deux courbes aient même courbure? il en résulte que les différentielles secondes d^2x, d^2y, d^2z s'iden-

tient de part et d'autre, comme celles du premier ordre et réciproquement. Soient, en effet, α, ϵ, γ les angles que la tangente commune aux deux courbes fait avec les axes des x , des y et des z ; l'on a généralement

$$dx = \cos \alpha \, d\sigma$$

$$dy = \cos \epsilon \, d\sigma$$

$$dz = \cos \gamma \, d\sigma.$$

ce qui donne d'abord

$$d^2x = -\sin \alpha \, dx \, d\sigma + \cos \alpha \, d^2\sigma$$

$$d^2y = -\sin \epsilon \, d\epsilon \, d\sigma + \cos \epsilon \, d^2\sigma$$

$$d^2z = -\sin \gamma \, d\gamma \, d\sigma + \cos \gamma \, d^2\sigma;$$

puis divisant par $(d\sigma)^2$.

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -\sin \alpha \, \frac{dx}{d\sigma} + \cos \alpha \, \frac{d^2\sigma}{d\sigma^2}$$

$$\frac{d^2y}{d\sigma^2} = -\sin \epsilon \, \frac{d\epsilon}{d\sigma} + \cos \epsilon \, \frac{d^2\sigma}{d\sigma^2}$$

$$\frac{d^2z}{d\sigma^2} = -\sin \gamma \, \frac{d\gamma}{d\sigma} + \cos \gamma \, \frac{d^2\sigma}{d\sigma^2}.$$

Or, on sait que pour une direction tangentielle déterminée par les angles α, ϵ, γ , la courbure dépend exclusivement des raisons de proportionnalité suivant lesquelles commence la génération simultanée des accroissements $(\Delta x, \Delta \sigma), (\Delta \epsilon, \Delta \sigma), (\Delta \gamma, \Delta \sigma)$. On sait de plus que ces raisons ont pour valeurs respectives les quotients $\frac{dx}{d\sigma}, \frac{d\epsilon}{d\sigma}, \frac{d\gamma}{d\sigma}$. Les équations qui précèdent montrent donc, avec évidence, que là où deux courbes ont même tangente, l'égalité de courbure implique l'identité des différentielles d^2x, d^2y, d^2z , et réciproquement ¹.

La déduction que nous venons d'établir est susceptible d'applications nombreuses. Elle offre, dans toutes, et au plus haut degré, l'avantage important d'une grande simplicité, jointe à une entière rigueur; donnons-en un exemple.

¹ Pour le voir, il suffit d'observer que l'on a en général

$$d\sigma \, d^2\sigma = dx \, d^2x + dy \, d^2y + dz \, d^2z,$$

ce qui permet d'éliminer $d^2\sigma$ sans introduire aucune variable nouvelle.

Courbure des surfaces

65. Soit une surface

$$z = F(x, y).$$

Pour abrégé, nous représenterons par p et q les dérivées partielles du premier ordre $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$, et par r , s , t , les dérivées partielles du second ordre $F''_{xx}(x, y)$, $F''_{xy}(x, y)$, $F''_{yy}(x, y)$.

Soit un point quelconque pris sur la surface. En ce point, où nous supposons l'origine des coordonnées transportée, le plan tangent a pour équation

$$(1). \quad dz - p dx - q dy = 0;$$

on a, d'ailleurs, pour équation différentielle du second ordre,

$$(2). \quad d^2z - p d^2x - q d^2y = r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2.$$

Considérons le cercle osculateur à une section plane faite sur la surface, pour le point dont il s'agit, et quel que soit ce cercle, concevons-le tracé sur la sphère.

$$(3). \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2;$$

par hypothèse, la sphère passe par l'origine, et l'on peut l'assujettir à toucher en ce point la surface donnée. On a donc, d'abord,

$$a^2 + b^2 + c^2 = r^2;$$

puis, différentiant l'équation (3)

$$(4). \quad (x-a) dx + (y-b) dy + (z-c) dz = 0,$$

et posant $x=0$, $y=0$, $z=0$,

$$a dx + b dy + c dz = 0.$$

De là résulte, eu égard à l'identité du plan représenté par cette équation, et du plan tangent fourni par l'équation (1)

$$\frac{a}{c} = -p, \quad \frac{b}{c} = -q;$$

il vient donc, en substituant dans l'expression de ρ ,

$$\rho = c \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Veut-on maintenant que pour deux sections quelconques faites par un même plan, l'une sur la surface donnée, l'autre sur la sphère, le point de contact devienne un point d'osculation? Il faut exprimer que, pour chacune de ces deux sections, la courbure, en ce point, est la même de part et d'autre.

Différentions, en conséquence, l'équation (4) et posons $x=0$ $y=0$, $z=0$, dans le résultat de la différentiation. Il vient ainsi

$$ad^2x + bd^2y + cd^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2;$$

ou remplaçant a et b par leurs valeurs

$$(5). \quad \dots \dots \dots d^2x - pd^2y - qd^2y = \frac{d\sigma^2}{c};$$

observons que, si le plan sécant est déterminé, les quantités dx , dy , dz le sont également. Donc, aussi, pour faire coïncider les équations de courbure (2) et (5), il suffit d'écrire

$$(6). \quad \dots \dots \dots \frac{d\sigma^2}{c} = rdx^2 + 2s dx dy + tdy^2,$$

et l'on en déduit immédiatement

$$(7). \quad \dots \dots \dots \rho = \frac{d\sigma^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}}{rdx^2 + 2s dx dy + tdy^2}.$$

Cela posé, s'il s'agit d'une section normale, la section qui lui correspond dans la sphère est un grand cercle, et elle a pour rayon de courbure le rayon ρ de la sphère. S'agit-il au contraire d'une section oblique, la section correspondante est un petit cercle. Néanmoins la sphère, sur laquelle ce cercle est tracé, ne change pas, si les quantités dx , dy , dz , restent les mêmes, c'est-à-dire si la section oblique a même tangente que la section normale. Or, en ce cas, désignant par ϵ l'angle des deux sections et par R le rayon du petit cercle, on a évidemment,

$$(8). \quad \dots \dots \dots R = \rho \cos \epsilon.$$

Donc, pour toute section normale, le rayon de courbure est fourni par l'équation (7), et, pour toute section oblique ayant même tangente, par l'équation (8).

Que l'on compare ces diverses solutions à celles que fournissent les méthodes ordinaires, et l'on devra convenir que, tout en gagnant sous le double rapport de la facilité des déductions et de la rigueur algébrique, nous sommes parvenus à acquérir des notions plus précises et plus approfondies.

Dans le dernier exemple, nous avons fait usage des différentielles du second ordre. Il convient qu'avant de terminer, nous indiquions en quelques mots le sens qui s'attache en général à ces différentielles, ainsi qu'à celles des ordres supérieurs.

Différentielles des ordres supérieurs.

66. Reprenons l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \Delta x,$$

et imaginons que la valeur attribuée à Δx soit quelconque, mais constante.

L'expression $f'(x) \Delta x$ peut alors être considérée comme variant avec l'origine de l'intervalle Δx . En ce cas l'on prend, pour objet direct de spéculation, l'étude des changements que subit, avec cette origine, le rapport suivant lequel *commence* la génération simultanée des accroissements, et rien n'empêche qu'on n'opère sur le produit $f'(x) \Delta x$, comme on l'a fait d'abord sur la fonction donnée $y = f(x)$.

De là résulte, en différentiant,

$$d. dy = f''(x) \Delta x^2.$$

On aurait de même

$$d. d. dy = f'''(x) \Delta x^3,$$

et ainsi de suite, indéfiniment.

En général, on rappelle par un indice le nombre des différentiations

effectuées successivement, et l'on a, pour la différentielle de l'ordre n ,

$$d^n y = f^n(x) \Delta x^n,$$

Les notions qui précèdent peuvent suffire, en ce qui concerne la définition des différentielles des ordres supérieurs. Cependant, elles ne donnent point une idée précise de ce que sont ces différentielles par rapport aux différences du même ordre qui leur correspondent, et, ne fût-ce que par ce motif, il ne saurait être sans utilité d'établir, pour une différentielle d'un ordre quelconque, l'interprétation directe dont elle est immédiatement susceptible.

Nous avons établi n° 49 que lorsque la dérivée de l'ordre n , $f^n(x)$ se résout en une constante, l'on a

$$\Delta^n y = f^n(x) \Delta x^n,$$

et, généralement, dans le cas contraire,

$$\Delta^n y = \Delta x^n [f^n(x) + \xi],$$

ξ étant une quantité qui converge vers zéro en même temps que Δx .

De là résultent, comme conséquences faciles à démontrer, sinon tout à fait évidentes, les énoncés suivants :

1° C'est suivant une raison déterminée, et exprimée, pour chaque origine, par la valeur correspondante de la dérivée $f^n(x)$, que commence la génération simultanée des grandeurs $\Delta^n y$, Δx^n ;

2° Dans le cas des fonctions algébriques rationnelles et entières de l'ordre n , cette raison est constante : elle est nulle pour les mêmes fonctions d'un ordre inférieur. Sauf ces exceptions, elle est toujours variable avec x dans l'intervalle Δx .

Cela posé, considérons une fonction quelconque autre que celles qui rentrent dans les exceptions précitées ; si l'on suppose pour cette fonction que la dérivée de l'ordre n conserve dans toute l'étendue de l'intervalle Δx la valeur particulière qu'elle y affecte à l'origine, la différence de l'ordre n correspondante à cette hypothèse est généralement autre que la différence effective $\Delta^n y$. Pour l'en distinguer, on lui donne le nom de différentielle, et l'on

substitue à la caractéristique Δ la caractéristique d . L'on a ainsi et simultanément

$$\Delta^n y = \Delta x^n [f^n(x) + \xi] = \Delta x^n \prod_x^{x+\Delta x} f^n(x),$$

$$d^n y = \Delta x^n \cdot f^n(x).$$

On voit, par ces détails très-simples, que la définition, donnée d'abord pour la différentielle du premier ordre, s'étend d'elle-même aux différentielles des ordres supérieurs, la différentielle de l'ordre n n'étant, en général, qu'une différence ordinaire du même ordre prise dans une hypothèse particulière. Quant à cette hypothèse, voici en quoi elle consiste :

On sait que la raison de proportionnalité, suivant laquelle commence la génération simultanée des grandeurs $\Delta^n y$, Δx^n varie incessamment dans l'intervalle Δx . Cela posé, au lieu de considérer ce qui a lieu effectivement, c'est-à-dire la génération complexe qui correspond à la succession non interrompue des valeurs toujours changeantes et toujours transitoires de la raison dont il s'agit, on suppose que cette même raison, devenue permanente, persiste dans la valeur particulière qu'elle affecte à l'origine des accroissements. A cette hypothèse répond une différence ordinaire de l'ordre n exprimée par le produit $f^n(x) \Delta x^n$ et constituant, par rapport à la fonction donnée, la différentielle du même ordre $d^n y$. A ce point de vue la différentielle n'est qu'une différence ordinaire. Toutefois elle ne doit pas être confondue avec la différence effective $\Delta^n y$. De là le changement de caractéristique. Il accuse à la fois la distinction qui doit être maintenue entre les grandeurs $\Delta^n y$ et $d^n y$ et le lien de dépendance qui les détermine l'une par l'autre, et réciproquement.

D'après ce qui précède, il est visible que les formules générales (18) et (57) des numéros (48) et (50) peuvent s'écrire très-simplement à l'aide des différentielles des ordres supérieurs. Suppose-t-on, par exemple, que la fonction donnée soit développable en série convergente d'après la formule de Taylor? L'on a dans ce cas

$$(1) \quad \Delta y = dy + \frac{d^2 y}{1.2} + \frac{d^3 y}{1.2.3} + \text{etc.} + \frac{d^n y}{1.2 \dots n} + \text{etc.}$$

et plus généralement

$$(2) \quad \dots \quad \Delta^n y = \binom{n}{m} d^m y + \binom{n-1}{n} d^{n+1} y + \binom{n-2}{n} d^{n+2} y + \text{etc.}$$

Nous avons d'ailleurs démontré que, dans tous les cas possibles, les équations (1) et (2) subsistent identiquement, pourvu qu'on arrête les développements avant la première des différentielles qui cesse d'être continue, et qu'on les complète par le terme sommatoire dont nous avons donné l'expression rigoureuse. Ce terme sommatoire, lorsqu'on s'arrête au terme de rang p , $\sum_n d^p y$, a pour valeur exacte

$$\frac{\Delta x}{1.2\dots p} \sum_{m=0}^{m=n-1} (-1)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{1.2\dots m} (n-m) \prod_x^{x+(n-m)\Delta x} (x-x)^m p^{n+1}(x).$$

La forme sous laquelle nous venons d'écrire les équations (1) et (2) peut être considérée comme résumant cette étude. Elle tranche nettement avec la méthode des infiniment petits, et met en évidence l'absurdité radicale de cette conception qui fait évanouir, les unes devant les autres, les différentielles d'ordres différents.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages	Numéros
EXPOSÉ GÉNÉRAL	3	
du chapitre I ^{er}	4	
du chapitre II ^{me}	5	
du chapitre III ^{me}	7	
du chapitre IV ^{me}	9	
Méthode des fluxions comparée à notre méthode	11	

CHAPITRE I^{er}. — Démonstration à priori de l'équation fondamentale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Remarque sur les valeurs effectives et sur les valeurs limites	16	2
Conditions supposées remplies par la fonction $y = f(x)$	17	3 à 5
Recherche des diverses conditions que peut subir le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable	20	6
Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut-il être indépendant	de x et de h . 1 ^{er} cas	20
	de h . 2 ^{me} cas	22
	de x . 3 ^{me} cas	25
Conséquences premières	25	11
Observations sur la variation du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$	25	12 à 15
1 ^{re} Question à résoudre	27	14
2 ^{me} Question à résoudre	29	15 à 16
3 ^{me} Question à résoudre	32	17 à 20
Résumé	40	21
Conclusion	42	22
Continuité générale de la fonction dérivée $f'(x)$	45	23 à 26
Résumé général du chapitre 1 ^{er}	50	27

CHAPITRE 2^{me}. — Définition et interprétation de l'équation différentielle

$$dy = f'(x) \Delta x,$$

Le lieu de dépendance, qui s'étend jusqu'à l'origine des accroissements Δy et Δx ,
se résout, à cette origine, en une loi générale de proportionnalité 55 28 à 30

	Pages.	Numéros.
Image sensible du mode de génération de l'accroissement Δy	60	51 à 53
Définition de la différentielle	64	54 à 55
Conséquences	67	56 à 58

CHAPITRE III^{me}. — Applications algébriques du théorème fondamental

$\lim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$	70	59
Règle unique et générale de la dérivation	71	40
Conséquences	72	41
Emploi des dérivées dans l'analyse algébrique.	74	42
Théorème fondamental $\Delta y = \Delta x \mathbf{M}_x^* f'(x)$	75	43
Relations générales entre les valeurs moyennes des dérivées successives	77	44
Conséquences. $f(z) = f(x) + \frac{z-x}{1} f'(x) + \text{etc.} + \frac{(z-x)^n}{1.2 \dots n} f^n(x)$ $+ \frac{z-x}{1.2 \dots n} \mathbf{M}_x^* (z-x)^n f^{n+1}(x)$	79	45
Applications générales. Formules de Taylor et de Mac-Laurin	79	46 à 47
Remarque curieuse sur la discontinuité de θ dans l'équation $\Delta y = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$	81	48
Différence des ordres supérieurs et moyennes multiples	84	49
Formule générale $\Delta^n y = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} \Delta x^n f^n(x) + \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ n \end{smallmatrix} \right\} \Delta x^{n+1} f^{n+1}(x) + \text{etc.}$	86	50
Relations curieuses entre les moyennes simples et les moyennes multiples	89	51
Vérification de la formule $\Delta^n y = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} \Delta x^n f^n(x) + \text{etc.}$, et remarques.	89	52

CHAPITRE IV^{me}. — Applications de l'équation $dy = f'(x) \Delta x$.

Définition exacte et complète de la différentielle. Discussion	92	53 à 54
Nature intime de la courbe démontrée <i>a priori</i>	96	55 à 57
Conditions intimes du mouvement d'un point	102	58
Applications du second théorème du n° 56	102	59
Rôle assigné au calcul différentiel	104	60
Autres applications générales	106	61
Tangente et plan normal à une courbe	107	62
Plan tangent à une surface	109	63
Courbure des courbes	109	64
Courbure des surfaces	111	65
Différentielles des ordres supérieurs	113	66
Formule générale $\Delta^n y = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} d^n y + \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ n \end{smallmatrix} \right\} d^{n+1} y + \text{etc.}$	116	66

FIN.

646078

